

Technische Universität Berlin

Fakultät V - Institut für Mechanik

Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller

Projekt Simulationstools und ihre Anwendung

Laserschweißen eines Stahlrohres

eingereicht von: Adam Butz

Tristan Traoré

Mathias Dornig

Martin Beckmann

eingereicht am: 3. April 2014

Betreuer: Dipl.-Ing. Paul Lofink

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Symbolverzeichnis	II
Abbildungsverzeichnis	III
1 Einleitung	1
2 Theorie	2
2.1 Herleitung der lokalen Bilanzen für Masse, Impuls und totale Energie	2
2.2 Aktuelle Platzierung und Bezugsplatzierung	6
2.3 Materialgleichungen	11
3 Modellierung und Implementierung	13
3.1 Modellierung des Laserschweissprozesses	13
3.2 Festlegung des Koordinatensystems	17
3.3 Implementierung des Problems	21
4 Auswertung	22
4.1 Ergebnisse für kart. Rechnung	22
4.2 Vergleich und Schlussfolgerungen	22
5 Zusammenfassung und Ausblick	23
Literaturverzeichnis	24
Anhang	25

Formelverzeichnis

Formelzeichen	Bedeutung	Einheit
A	Fläche	m^2
c	spezifische Wärmekapazität	$J/(kg \cdot K)$
E	Elastizitätsmodul	N/m^2
J	Determinanten d. Deformationsgradienten	1
M	Masse	kg
V	Volumen	m^3
t	Zeit	s
T	Temperatur	K
λ, μ	Lamé-Konstanten	N/m^2
α	Längenausdehnungskoeffizient	$1/K$
κ	spezifische Wärmeleitfähigkeit	$W/(m \cdot K)$
ρ	Dichte	kg/m^3
ν	Poissonzahl	1
u	innere Energie	J
\mathbf{u}	Verschiebungen	m
\mathbf{v}	Geschwindigkeit	m/s
\mathbf{n}	Normalenvektor	1
f	Gravitationsbeschleunigung	m/s^2
\mathbf{C}	Rechter Cauchy-Green-Tensor	1
\mathbf{E}	Green'scher Verzerrungstensor	1
\mathbf{E}^{th}	Thermische Deformation	1
\mathbf{F}	Deformationsgradient	1
\mathbf{G}	Metriktensor	1
\mathbf{P}	1.Piola-Kirchhoff-Spannungstensor	N/m^2
Q	Wärme in aktueller Platzierung	J
q	Wärme in Bezugsplatzierung	J
r	Strahlungseintrag	m^2/s^3
\mathbf{S}	2.Piola-Kirchhoff-Spannungstensor	N/m^2
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor	N/m^2

Abbildungsverzeichnis

1.1	Laserschweißen nach [Wel14]	1
2.1	Aktuelle Platzierung und Bezugsplatzierung	6
3.1	Gaußverteilung des Lasers	15
3.2	Vernetztes Rohr in kart. Koordinaten	19
3.3	Gitter in Zylinderkoordinaten mit Transformation in kartesische Koordinaten	20
3.4	Implementierung Struktogramm	21
4.1	Temperaturverteilung für kart. Rechnung in Kelvin	22
4.2	Verschiebungen für kart. Rechnung in Metern	22

1 Einleitung

Unter Schweißen versteht man gemäß EN 14610 das unlösbare Verbinden von Bauteilen unter Anwendung von Wärme. Das Laserstrahlschweißen (EN ISO 4063) wird vor allem zum Verschweißen von Bauteilen eingesetzt, die mit hoher Schweißgeschwindigkeit, schmaler und schlanker Schweißnahtform und mit geringem thermischen Verzug gefügt werden müssen. Insbesondere im Karosseriebau der Automobil-, Luftfahrt- und Schiffbauindustrie ist das Laserschweißen als Industriestandard und als Hochleistungsprozess weit verbreitet. Ursachen dafür sind die sehr kurzen Schweißzeiten, die hohen erzielbaren Genauigkeiten und der vergleichsweise große Arbeitsabstand, der es ermöglicht auch an schwer zugänglichen Stellen zu fügen. Des Weiteren spielen auch ökonomische Aspekte eine Rolle, wie z. B. der hohe Grad an Automatisierbarkeit, der eine einfache und effiziente Fließbandproduktion erlaubt.

Durch die Fokussierung der Laseroptik an der Fügestelle steigt am sog. Brennfleck die Temperatur rapide an, sodass die Schmelztemperatur des Materials lokal überstiegen wird. Nach dem Abkühlen und Erstarren der Schmelze entsteht eine widerstandsfähige und dauerhafte Stoffverbindung. Die durch den Eintrag der Strahlungsenergie des Laser resultierende Temperaturänderung und die damit verbundenen Verschiebungen und Spannungen lassen sich mithilfe der Kontinuumstheorie hervorragend als thermo-mechanisches Problem modellieren.

Das Kapitel 2 widmet sich der Theorie und den Grundlagen der Kontinuumstheorie, die zur Bearbeitung der Problemstellung unabdinglich sind. Anschließend steht in Kapitel 3 die eigentliche Modellierung und Implementierung des Sachverhalts im Mittelpunkt. Dabei wird ausschließlich OpenSource-Software (Gmsh, FEniCS und Paraview) verwendet, um den Sachverhalt zu modellieren, simulieren und darzustellen. Im Verlaufe der Bearbeitung ergaben sich verschiedene Lösungsansätze, die gesondert aufgeführt sind und im Kapitel 4 dann einer genaueren Betrachtung und Auswertung unterzogen werden.



Abb. 1.1: Laserschweißen nach [Wei14]

2 Theorie

Für eine computergestützte Simulation eines Prozesses, in diesem Fall des Laserschweißens, ist es zunächst wichtig, ein System aus Gleichungen zu identifizieren, das den entsprechenden Prozess mit ausreichender Genauigkeit beschreibt.

Diese Gleichungen müssen daraufhin in eine Form gebracht werden, die eine Computergestützte Berechnung zulassen. Viele Prozesse in der Technik, insbesondere das Laserschweißen, lassen sich vorteilhaft mit Hilfe der drei Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie beschreiben.

Dabei erleichtert eine Beschreibung der Gleichungen in einer festen Bezugsplatzierung die Berechnungen immens. Die hierfür notwendigen Transformationsvorschriften werden beschrieben. Mit Hilfe dieser können die lokalen Bilanzgleichungen dann mit Größen der Bezugsplatzierung ausgedrückt werden.

2.1 Herleitung der lokalen Bilanzen für Masse, Impuls und totale Energie

Im folgenden Abschnitt wird dargelegt wie aus der globalen Formulierung dieser Bilanzgleichungen die lokale Formulierung abgeleitet werden kann, die sich für die Berechnung mit einem Computer wesentlich besser einsetzen lässt.

2.1.1 Allg. Herleitung der lokalen Bilanzgleichungen aus den globalen Gleichungen

In diesem Abschnitt soll zunächst einführend eine allgemeine Herleitung der lokalen Bilanzgleichungen aus den globalen Gleichungen dargestellt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in diesem Abschnitt die symbolische Schreibweise angewendet.

Die allgemeine Form einer globalen Bilanzgleichung in symbolischer Schreibweise wird in der Literatur wie folgt angegeben [Dre11]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \psi \, dV = - \oint_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \, dA + \int_{\Omega(t)} \xi(t, \mathbf{x}) \, dV. \quad (2.1)$$

Mit ψ als zu bilanzierende additive Größe (beispielsweise die Impulsdichte). Der ‘Fluss’ $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}$ ist die Größe, die durch die Oberfläche des betrachteten Volumens in Richtung der entsprechenden Normalen auf der Oberfläche auftritt (beispielsweise die an der Oberfläche auftretende Spannung). Die Bilanzgröße ξ ist die dem Volumen innewohnende Komponente (beispielsweise die Kraftdichte, die durch die Schwerkraft hervorgerufen wird).

Das Reynold'sche Transporttheorem lautet:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi \, dV = \oint_{\partial\Omega} \psi \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial t} \, dV. \quad (2.2)$$

Durch Anwendung des Reynold'schen Transporttheorems auf die linke Seite lässt sich die Zeitableitung in das Integral ziehen und die Gleichung stellt sich dar als:

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial\psi}{\partial t} \, dV + \oint_{\partial\Omega(t)} (\psi \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \int_{\Omega(t)} \xi \, dV. \quad (2.3)$$

Der Satz von Gauß lautet:

$$\oint_{\partial\Omega} \psi \, \mathbf{n} \, dA = \int_{\Omega} \operatorname{div}\psi \, dV. \quad (2.4)$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß kann das Flächen- in ein Volumenintegral umgewandelt werden, was zu folgender Gleichung für die Bilanz führt:

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \, \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}) - \xi \right) \, dV = 0. \quad (2.5)$$

In dieser Form kann das gewählte Integral allerdings beliebig groß gewählt werden und der Integrand muss für jedes Gebiet Ω gleich Null sein. Daraus ergibt sich die allgemeine symbolische Formulierung der lokalen Bilanzgleichungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \, \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}) = \xi. \quad (2.6)$$

2.1.2 Herleitung der lokalen Massenbilanzgleichung

In diesem Abschnitt wird die lokale Massenbilanzgleichung hergeleitet. Anders als im vorangegangenen Abschnitt wird hier allerdings die indizistische Schreibweise angewandt, die zugegebenermaßen weniger übersichtlich, dafür allerdings gut für die Übertragung in eine Programmiersprache geeignet ist. Diese Art der Schreibweise wird daher auch im Folgenden beibehalten.

Die Gesamtmasse M eines materiellen Körpers kann als Zusammensetzung der Einzelmassen dM kleiner Untervolumina dV betrachtet werden. Die für die Masse eines solchen Untervolumens maßgebliche Massendichte $\rho = \hat{\rho}(X, t)$ kann sich örtlich und zeitlich ändern und es gilt [Che11]:

$$M = \int_M dM = \int_{V(t)} \rho dV. \quad (2.7)$$

Die Gesamtmasse des gesamten betrachteten materiellen Körpers jedoch ändert sich zeitlich nicht:

$$\frac{dM}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (2.8)$$

Die Massenbilanzgleichung in der globalen Formulierung lautet also:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.9)$$

Die Herleitung der lokalen Bilanzgleichung ergibt sich nun analog zu 2.1.1.

Nach Anwendung des Satzes von Gauß und dem Reynold'schem Transporttheorem auf die Massenbilanzgleichung ergibt sich diese dann zu:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{;i} \right) dV = 0. \quad (2.10)$$

Die aktuelle, lokale Massenbilanz lautet demzufolge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{;i} = 0. \quad (2.11)$$

2.1.3 Herleitung der lokalen Impulsbilanzgleichung

Die Herleitung der lokalen Impulsbilanz erfolgt analog. Ausgehend von der gegebenen globalen Impulsbilanz

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v^i dV = \oint_{\partial V} \sigma^{ji} n_j dA + \int_V \rho f^i dV \quad (2.12)$$

lässt sich durch Anwendung des Reynold'schen Transporttheorems und des Gauß'schen Integralsatzes die lokale Bilanzgleichung herleiten. Diese lautet wie folgt:

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + (\rho v^i v^j)_{;j} - \sigma^{ji}_{;j} - \rho f^i = 0. \quad (2.13)$$

2.1.4 Herleitung der lokalen Energiebilanzgleichung

Wie in den vorhergegangenen Aufgabenteilen wird auch hier die globale Bilanzgleichung als Ausgangspunkt für die Herleitung der lokalen Energiebilanzgleichung verwendet.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^i v_i}{2} + u \right) dV = \oint_{\partial V} \sigma^{ji} n_j v_i dA + \int_V \rho f^i v_i dV - \oint_{\partial V} q^j n_j dA + \int_V \rho r dV \quad (2.14)$$

Nach Anwendung des Reynold'schen Transporttheorems und des Gauß'schen Integralsatzes analog zu den Umformungen in der Massen- und Impulsbilanz ergibt sich die lokale Energiebilanzgleichung folgendermaßen:

$$\frac{\partial(\rho(\frac{v^i v_i}{2} + u))}{\partial t} + \left(\rho \left(\frac{v^i v_i}{2} + u \right) v^j \right)_{;j} - (\sigma^{ji} v_i)_{;j} + q^j_{;j} - \rho(f^i v_i + r) = 0 \quad (2.15)$$

2.1.5 Bilanz der inneren Energie

In der dargestellten Form sind bestimmte Teile der Bilanzen redundant. Es lässt sich zeigen, dass sich aus der Bilanz der totalen Energie durch Einsetzen der Massenbilanz und geschickter Subtraktion der Impulsbilanz die sogenannte Bilanz der Energie erhalten lässt. Diese ist im Folgenden dargestellt:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + (\rho u v^j)_{;j} - \sigma^{ji} v_{i;j} - \rho r + q^i_{;i} = 0. \quad (2.16)$$

2.2 Aktuelle Platzierung und Bezugsplatzierung

Wird ein vorhandenes Volumen, beispielsweise ein Körper, beschrieben, kann dies über verschiedene Systeme (Platzierungen) durchgeführt werden. Man unterscheidet, wie in Abb.1 zu sehen, zwischen der Bezugsplatzierung (BP) und der aktuellen Platzierung (AP). Die Bezugsplatzierung ist dabei im Allgemeinen das Volumen in der Ausgangssituation.

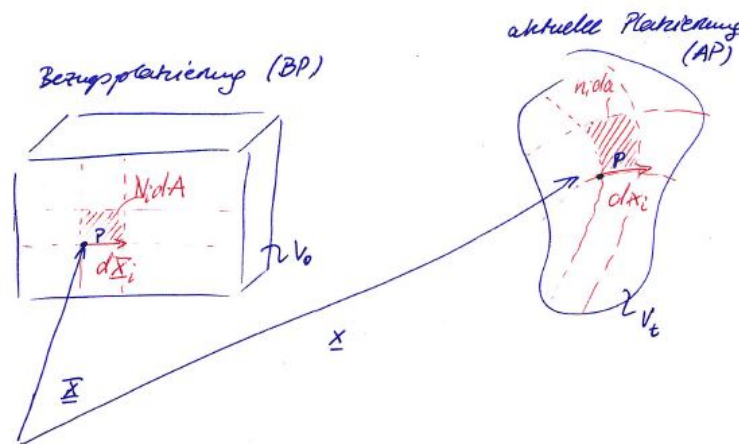


Abb. 2.1: Aktuelle Platzierung und Bezugsplatzierung

Dementsprechend können mit Hilfe dieser Unterscheidung Größen in der BP oder der AP betrachtet werden. Wir sprechen bei Darstellungen in der BP von Lagrange Darstellungen bzw. materiellen Darstellungen und Darstellungen in der AP werden Euler'sche Darstellungen oder räumliche Darstellungen genannt.

2.2.1 Wichtige Größen für die Transformation

Um die beschriebene Möglichkeit der Transformation zwischen aktueller- und Bezugsplatzierung vorteilhaft nutzen zu können, sind Berechnungsvorschriften notwendig, die den Zusammenhang verschiedener Größen in den entsprechenden Platzierungen beschreiben. Da diese Vorschriften aufeinander aufbauen ist es überaus wichtig, diese Größen konsistent zu formulieren.

Aus diesem Grund werden nun die entsprechenden Größen nach den Definitionen von [Ber05] vorgestellt.

Zunächst kann die AP mit Hilfe der Größen der BP wie folgt beschrieben werden:

$$z_i = \phi_i(Z_k, t) \quad (2.17)$$

Hierbei werden durch z_i Ortskoordinaten der AP und durch Z_k Ortskoordinaten der BP bezeichnet.

Eine maßgebliche Größe bei der Transformation spielt die Deformation des betrachteten Volumens. Diese wird durch den sogenannten Deformationsgradienten F_j^i beschrieben:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial z^i}{\partial Z^j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.18)$$

Die Determinante des Deformationsgradienten J kann als Maß der Volumenänderung einer Bewegung oder Deformation angesehen werden.

Der rechte Cauchy-Green-Tensor, der mit Hilfe des Deformationsgradienten definiert ist, erlaubt eine Beschreibung der für die meisten wissenschaftlichen Zwecke wesentlichen Teile der Deformation wie Dehnung, Stauchung oder Scherung:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.19)$$

oder

$$\mathbf{C} = \frac{\partial z^l}{\partial Z^i} G_{lm} \frac{\partial z^m}{\partial Z^j} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.20)$$

Rotatorische Bewegungen des Volumens, die für den betrachteten Körper im Allgemeinen keine wesentlichen Auswirkungen haben, werden in diesem Verzerrungsmaß bewusst nicht dargestellt, wie sich nach einer Polarzerlegung in $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$ leicht feststellen lässt.

Hier wird mit G_{lm} die Metrik beschrieben. Es wird im Folgenden vereinfachend angenommen dass es ein Koordinatensystem gibt, dessen Raum den Körper sowohl in aktueller als auch in Bezugsplatzierung umschließt. Folglich wird in beiden Platzierungen der selbe Satz natürlicher Basen und dementsprechend auch der Metriken verwendet.

Nun kann mit den genannten Größen auch der Green'sche Verzerrungstensor E berechnet werden. Dieser bietet insbesondere für ingenieurwissenschaftliche Anwendungen den Vorteil, dass er sich bei einer Bewegung ohne Stauchung, Dehnung oder Scherung zu null ergibt:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - G_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z^l}{\partial Z^i} G_{lm} \frac{\partial z^m}{\partial Z^j} - G_{ij} \right). \quad (2.21)$$

2.2.2 Transformationsregeln

Die Transformationsregeln, die für die Darstellung der Bilanzgleichungen mit Größen der Bezugsplatzierung notwendig sind, lassen sich allgemein in folgender Weise definieren:

$$z_i = \phi_i(Z_k, t) \quad F_j^i = \frac{\partial z^i}{\partial Z^j} \quad J = \det(F_j^i) \quad (2.22)$$

$$dz^i = F_j^i dZ_j \quad n_i da = J (F^{-1})^k_i N_k dA \quad dv = J dV \quad (2.23)$$

Hier und im Folgenden werden aus Gründen der Übersichtlichkeit Großbuchstaben für Größen in der Bezugsplatzierung, und Kleinbuchstaben für Größen in der aktuellen Platzierung verwendet.

2.2.3 Massenbilanz in Bezugsplatzierung

Die allgemeine Transformation der Massenbilanz von der Lagrange Darstellung zur Euler Darstellung sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho dv = 0 \quad \xrightarrow{\text{Transformation}} \quad \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho J dV = 0. \quad (2.24)$$

Mit der Feststellung, dass die Bezugsplatzierung **fest bzw. konstant** ist, kann mit Hilfe der materiellen Zeitableitung ($\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_L}{dt}$) folgende Schlussfolgerung gezogen werden:

$$\int_{V_0} \frac{d}{dt} (\rho J) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\rho_L J) = 0. \quad (2.25)$$

Hieraus folgt:

$$\rho J = \text{const} = \rho_0. \quad (2.26)$$

Hierbei bezeichnet ρ_0 die Dichte in der Bezugsplatzierung.

2.2.4 Impulsbilanz in Bezugsplatzierung

Ausgegangen wird von der globalen Impulsbilanz in aktueller Platzierung:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho v^i dv = \oint_{\partial V_t} \sigma^{ij} n_j da + \int_{V_t} \rho f^i dv, \quad (2.27)$$

wobei σ^{ij} den Cauchy-Spannungstensor darstellt. Transformiert in die räumliche Platzierung in Lagrange-Darstellung ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 v^i dV = \oint_{\partial V_0} \sigma^{ij} J (F^{-1})^k_j N_k dA + \int_{V_0} \rho_0 f^i dV, \quad (2.28)$$

wobei der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor als $P^{ik} = \sigma^{ij} J (F^{-1})^k_j$ definiert werden kann und sich nach Anwendung des Reynold'schen Transporttheorems und des Gauß'schen Integralsatzes die lokale Impulsbilanz in Bezugsplatzierung folgendermaßen ergibt:

$$\rho_0 \frac{\partial v^i}{\partial t} - P^{ik}_{;k} - \rho_0 f^i = 0. \quad (2.29)$$

2.2.5 Innere Energie in Bezugsplatzierung

Die lokale Darstellung der inneren Energie in Eulerdarstellung ist in der folgenden Gleichung angegeben:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + (\rho u v^j)_{;j} = \sigma^{ij} G_{ik} v^k_{;j} + \rho r - q^i_{;i}. \quad (2.30)$$

Durch die Integration über das gesamte Volumen in der aktuellen Platzierung und einsetzen des Reynold'schen Transporttheorems sowie des Gauß'schen Satzes entsteht die folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho u dv = \int_v \sigma^{ij} G_{ik} v^k_{;j} dv + \int_v \rho r dv - \int_{\partial v} q^i n_i da. \quad (2.31)$$

Durch Einsetzen der Transformationsvorschriften von der aktuellen in die Bezugsplatzierung $\rho = \frac{\rho_0}{J}$ und $dv = J dV$ sowie $n_i = J (F^{-1})^k_i N_k$ ergibt sich daraus:

$$\int_V \rho_0 \frac{du}{dt} dV = \int_V \sigma^{ij} J G_{ik} v^k_{;j} dV + \int_V \rho_0 r dV - \int_{\partial V} q^i J (F^{-1})^k_i N_k dA. \quad (2.32)$$

Die Transformationsvorschrift für die Ortsableitung lässt sich unter Verwendung von $(F^i_k)^{-1} F^i_k = \delta_{ik}$ wie folgt herleiten:

$$\frac{\partial z^i}{\partial Z^k} = F^i_k \Rightarrow dz^i = F^i_k dZ^k \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial X^k} (F^{-1})^i_k. \quad (2.34)$$

Mit den Identitäten und Definitionen

$$P^{ik} = J \sigma^{ij} (F^{-1})^k_j \quad (2.35)$$

$$Q^k = J (F^{-1})^k_i q^i \quad (2.36)$$

$$v^j = \frac{\partial x^j}{\partial t} = \frac{\partial (X^j + u^j)}{\partial t} = \frac{\partial u^j}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

ergibt sich daraus:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - P^{ik} G_{ij} \frac{\partial u^j_{;k}}{\partial t} - \rho_0 r + Q^k_{;k} = 0. \quad (2.39)$$

2.3 Materialgleichungen

In diesem Abschnitt werden die Materialgesetze dargestellt, die im Verlauf des Projektes eingesetzt wurden, um die wesentlichen Größen der Bilanzgleichungen wie Spannungen, Wärmeleitung oder innere Energie nur mit Hilfe von Materialparametern und den gesuchten Größen Verschiebung u und Temperatur T darzustellen.

2.3.1 Das Materialmodell nach Saint Venant-Kirchhoff

Beim Saint Venant-Kirchhoff-Modell handelt es sich um eine Möglichkeit, die Elastizität eines Materials zu beschreiben.

Im Gegensatz zum Hooke'schen Materialgesetz werden hierbei allerdings auch die geometrischen Nichtlinearitäten miteinbezogen, wie sie beispielsweise bei großen Deformationen auftreten können. Es handelt sich somit um eine allgemeinere Beschreibung des Materialgesetzes.

In diesem Modell wird das Materialverhalten nicht durch den Cauchy-Spannungstensor σ^{ij} , sondern durch den 2. Piola-Kirchhoff-Tensor S^{ik} , also in der Bezugsplatzierung beschrieben. Der in den bereits beschriebenen Bilanzgleichungen auftretende 1. Piola-Kirchhoff-Tensor P^{ik} kann dann über ein Verschieben des 2. Piola-Kirchhoff-Tensor ausgedrückt werden.

Das Materialgesetz des Saint Venant-Kirchhoff-Modells lautet:

$$S^{ij} = C^{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^{\text{th}}). \quad (2.40)$$

Bei C^{ijkl} handelt es sich um den sogenannten Steifigkeitstensor. Er wird nur durch die sogenannten Lamé-Konstanten λ und μ sowie die entsprechenden Metriken definiert:

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk}). \quad (2.41)$$

Die Lamé-Konstanten werden mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν wie folgt berechnet:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.42)$$

und

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.43)$$

Durch das von uns betrachtete Materialgesetz können die Spannungen mit Hilfe der elastischen Dehnungen berechnet werden. Die totale Dehnung setzt sich additiv aus dieser elastischen Dehnung und einem thermisch bedingten Anteil zusammen. Die elastischen Dehnungen ergeben sich also zu:

$$E^{el} = E - E^{th}. \quad (2.44)$$

Die thermische Deformation kann mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α und der Temperaturdifferenz bezüglich eines Ausgangszustandes ΔT wie folgt berechnet werden:

$$E_{kl}^{th} = \alpha \Delta T G_{kl}. \quad (2.45)$$

Der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor P^{ik} kann wie folgt mit Hilfe von S^{ik} beschrieben werden:

$$P^{ik} = F^i_j S^{jk}. \quad (2.46)$$

Auch der Cauchy-Spannungstensor kann also mit Hilfe von S^{ik} beschrieben werden.

$$\sigma^{lm} = \frac{1}{J} F^l_i S^{ik} F^m_k. \quad (2.47)$$

2.3.2 Fourier'sches Wärmeleitungsgesetz

Der Ausdruck Q^i in der Bilanzgleichung der Inneren Energie beschreibt eine Wärmeleitung. Das Fourier'sche Wärmeleitungsgesetz besagt nach [Ste07], dass diese Wärmeleitung wie folgt mit Hilfe der Temperatur T und der spezifischen Wärmeleitfähigkeit κ des entsprechenden Materials darzustellen ist :

$$Q^i = -\kappa G^{ji} \frac{\partial T}{\partial Z^j}. \quad (2.48)$$

2.3.3 Zeitliche Änderung der inneren Energie

Die zeitliche Änderung der inneren Energie $\frac{\partial u}{\partial t}$ kann nach [Che11] S.2f unter Einbeziehung der Wärmekapazität c und der Temperatur T dargestellt werden als:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.49)$$

3 Modellierung und Implementierung

In diesem Kapitel wird die Umsetzung der Simulation eines Laserschweißprozesses eines Rohres mit Hilfe von FEniCS beschrieben [LMW12]. FEniCS ist eine Erweiterung der Programmiersprache Python für die automatisierte Lösung von Differentialgleichungen. Die in den letzten Abschnitten aufgeführten Bilanzgleichungen für den Impuls und die Innere Energie stellen die Grundlage für eine derartige Simulation dar. Mit Hilfe dieser wird in Verbindung mit einem entsprechenden Gitter ein Problem aufgestellt, das mit der Finiten Elemente Methode (FEM) gelöst werden kann. Die Modellierung und Implementierung eines Problems, das den Laserschweißprozess beschreibt, wird in den nächsten Abschnitten beschrieben.

3.1 Modellierung des Laserschweißprozesses

Beim Laserschweißen handelt es sich um einen Prozess, bei dem gezielt Wärme in einen Körper eingebracht wird, um diesen an der entsprechenden Stelle auf seine Schmelztemperatur zu erhitzen.

Für die Modellierung des Laserschweißens eines Rohres werden im Rahmen dieses Projektes die folgenden Annahmen getroffen:

- Rein elastische Deformation
- Modellierung des Lasers durch den Strahlungsterm
- Beidseitige feste Einspannung
- Wärmefluss über die gesamte Oberfläche des Rohres
- Abwesenheit zusätzlicher äußerer Kräfte
- Vernachlässigung der Gravitation

Die Bilanzgleichungen für Innere Energie und Impuls werden in den nächsten Abschnitten an diese Annahmen angepasst, um durch diese das Problem des Laserschweißens beschreiben zu können. Die Massenbilanz ist trivial erfüllt und wird daher hier nicht weiter betrachtet.

Die Allgemeine Form der Bilanzgleichungen dargestellt mit Größen der Bezugsplatzierung sei hier noch einmal dargestellt.

Bilanzgleichung der Inneren Energie:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - P^{ik} G_{ij} \frac{\partial w_{;k}^j}{\partial t} - \rho_0 r - Q^i_{;i} = 0. \quad (3.1)$$

Bilanzgleichung des Impulses:

$$\rho_0 \frac{\partial v^i}{\partial t} - P^{ik}_{;k} - \rho_0 f^i = 0 \quad (3.2)$$

3.1.1 Schwache Formulierung der Bilanzgleichungen

Für das Lösen der Bilanzgleichungen mit den Mitteln der FEM ist es zunächst notwendig, diese in die schwache Formulierung zu überführen. Diese Formulierung erlaubt darüber hinaus auch eine vereinfachte Integration von Neumann- und Robin-Randbedingungen.

Die Dirichlet-Randbedingungen werden über die Wahl des Ansatzraumes für die FEM eingebracht. Für die Überführung einer Gleichung in deren schwache Formulierung ist es notwendig, beide Seiten der Gleichung mit einer sogenannten Testfunktion zu multiplizieren. Die hier verwandten Testfunktionen werden mit δu^i , bzw. δT bezeichnet. Durch den Einsatz der Regel für die partielle Ableitung und des Satzes von Gauß entstehen aus den Bilanzgleichungen nach Einsetzen der Definitionen für u und Q^i die folgenden schwachen Formulierungen:

$$\int_V \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dV - \int_V P^{ik} G_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial t} \delta T dV - \int_V \rho_0 r \delta T dV - \int_V Q^i \frac{\partial(\delta T)}{\partial Z^i} dV + \oint_{\partial V} \delta T Q^i N_i dA = 0 \quad (3.3)$$

und

$$\int_V \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t \partial t} G_{ji} \delta u^j dV + \int_V P^{ik} G_{ji} \delta u^j_{;k} dV - \oint_{\partial V} P^{ik} G_{ji} \delta u^j N_k dA - \int_V \rho_0 f^i dV = 0 \quad (3.4)$$

3.1.2 Vernachlässigung der Gravitation

Im Folgenden wird der Einfluss der Gravitation vernachlässigt. Der entsprechende Term in der Impulsbilanz entfällt demzufolge. Die schwache Formulierung der Impulsbilanz ergibt sich zu:

$$\int_V \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t \partial t} G_{ji} \delta u^j dV + \int_V P^{ik} G_{ji} \delta u^j_{;k} dV - \oint_{\partial V} P^{ik} G_{ji} \delta u^j N_k dA = 0 \quad (3.5)$$

3.1.3 Rein elastische Deformation

In diesem Projekt werden nur rein elastische Deformationen berücksichtigt. Das bereits beschriebene Materialmodell nach Saint Venant-Kirchhoff kann hier dazu eingesetzt werden, um auch die Spannungen für große, nichtlineare Deformationen zu betrachten:

$$S^{ij} = C^{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^{\text{th}}) \quad (3.6)$$

und

$$P^{ik} = F^i_j S^{jk}. \quad (3.7)$$

Aus Gründen der Übersicht werden diese Identitäten nicht in die Bilanzgleichungen eingesetzt.

3.1.4 Modellierung des Lasers durch den Strahlungsterm

Der Wärmeeintrag, den der Laser verursacht, wird über den Strahlungsterm r in der Bilanz der inneren Energie modelliert. Der Lasereintrag wird hierbei durch eine Gauß'sche Glockenkurve realisiert, wie sie in der Abbildung 3.1 dargestellt ist:

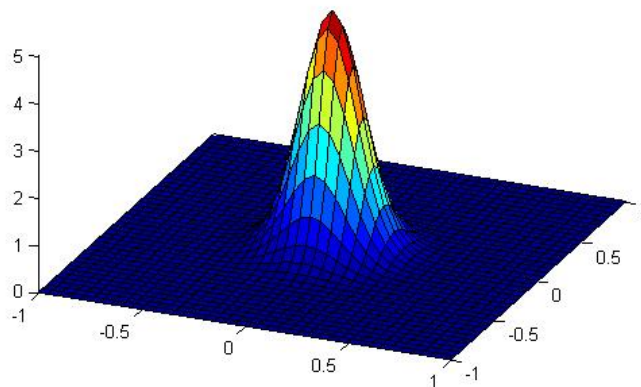


Abb. 3.1: Gaußverteilung des Lasers

Eine solche Verteilung kann beispielsweise mit einer derartigen Funktion dargestellt werden:

$$r = P_0 e^{-\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right)}, \quad (3.8)$$

wobei die Intensität durch den Vorfaktor P_0 so angepasst werden kann, dass die Schmelztemperatur gerade erreicht wird.

3.1.5 Beidseitige feste Einspannungen

Die beidseitige feste Einspannung kann über Dirichlet-Randbedingungen realisiert werden. Diese geben Werte vor, die auf dem jeweiligen Rand des Definitionsbereichs von der Funktion angenommen werden sollen. Im vorliegenden konkreten Fall sollen die Verschiebungen \mathbf{u} am linken und rechten Rand dauerhaft bei Null festgehalten werden:

$$u_i^{links} \stackrel{!}{=} 0 \quad u_i^{rechts} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.9)$$

Wie bereits erwähnt, werden bei der Formulierung der FEM derartige Randbedingungen nicht durch Anpassung des Gleichungssystems, sondern vielmehr durch Anpassung des Ansatzraumes integriert. Im Programmiercode ist die feste Einspannung mittels Dirichlet-Randbedingungen verwirklicht worden.

3.1.6 Wärmefluss über die Oberfläche

Der Wärmefluss durch die Oberfläche des Rohres kann durch den Einsatz von Robin-Randbedingungen modelliert werden. Hierbei wird das Integral des Flusses über die Oberfläche in der schwachen Formulierung der Bilanz der inneren Energie wie folgt definiert:

$$\oint_{\partial V} \delta T Q^i N_i dA = \oint_{\partial V} \delta T h (T - T_{\text{umg}}) dA \quad (3.10)$$

Hierbei beschreiben h und T_{umg} den Wärmeübergang und die Umgebungstemperatur. Die schwache Formulierung der inneren Energie ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned} \int_V \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dV - \int_V P^{ik} G_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial t} \delta T dV - \int_V \rho_0 r \delta T dV \\ - \int_V Q^i \frac{\partial(\delta T)}{\partial Z^i} dV + \oint_{\partial V} \delta T h (T - T_{\text{umg}}) dA = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.7 Abwesenheit zusätzlicher äußerer Kräfte

Um außer den Zwangskräften für die feste Einspannung an beiden Rändern keine weiteren äußeren Kräfte zuzulassen, werden die Spannungsrandterme in der schwachen Formulierung der Impulsbilanz eliminiert. Die schwache Formulierung der Impulsbilanz ergibt sich somit zu:

$$\int_V \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} G_{ji} \delta u^j dV + \int_V P^{ik} G_{ji} \delta u^j_{;k} dV = 0 \quad (3.12)$$

3.1.8 Zeitableitungen mittels finiter Differenzen

Um die Zeitableitungen möglichst effizient in eine numerische Berechnung übertragen zu können, werden diese in die Form der finiten Differenzen überführt. Daraus resultiert folgender Zusammenhang für die erste Zeitableitung:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (u^i - u_0^i), \quad (3.13)$$

wobei u_0^i die Verschiebung des Zeitschrittes vor dem derzeit betrachteten Zeitschritt ist. Für die zweite Zeitableitung kann folgender Zusammenhang angegeben werden:

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial t \partial t} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (u^i - 2u_0^i + u_{00}^i), \quad (3.14)$$

wobei hier u_{00}^i die entsprechende Verschiebung vor zwei Zeitschritten bezeichnet.

3.1.9 Schwache Formulierungen für die Simulation des Laserschweißens

Die endgültigen schwachen Formulierungen der Bilanzgleichung, wie sie für die numerische Berechnung implementiert werden, sind im Folgenden aufgeführt.

Schwache Formulierung der Impulsbilanz:

$$\int_V \rho_0 \frac{1}{(\Delta t)^2} (u^i - 2u_0^i + u_{00}^i) G_{ji} \delta u^j dV + \int_V P^{ik} G_{ji} \delta u_{;k}^j dV = 0 \quad (3.15)$$

Schwache Formulierung der Bilanz der inneren Energie:

$$\begin{aligned} \int_V \rho_0 c \frac{1}{\Delta t} (T - T_0) \delta T dV - \int_V P^{ik} G_{ij} \frac{1}{\Delta t} (u_{;k}^j - u_{0;k}^j) \delta T dV - \int_V \rho_0 r \delta T dV \\ - \int_V Q^i \frac{\partial(\delta T)}{\partial Z^i} dV + \oint_{\partial V} \delta T h (T - T_{\text{umg}}) dA = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2 Festlegung des Koordinatensystems

Bis zu diesem Punkt wurden alle Gleichungen möglichst weitestgehend unabhängig von einem Koordinatensystem beschrieben. Für die eigentliche Berechnung ist die Festlegung eines Koordinatensystems allerdings wesentlich und hat Auswirkungen sowohl auf die Gleichungen als auch auf den betrachteten Lösungs- und Ansatzraum. Es werden im Folgenden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt. Zum einen eine klassische Rechnung in kartesischen Koordinaten und zum anderen eine Rechnung in Zylinderkoordinaten, die bei der Geometrie eines Rohres sehr naheliegend

ist. Die numerische Berechnung dieser beiden Ansätze unterscheidet sich einerseits natürlich in der Definition, der in den Gleichungen auftauchenden Berechnungsvorschriften. Andererseits unterscheiden sich auch die Gitter, auf denen gerechnet wird entsprechend des verwendeten Koordinatensystems.

3.2.1 Implementierung in kart. Koordinaten

Die Modellierung des Problems in kartesischen Koordinaten stellt die gebräuchlichste Form der Bearbeitung derartiger Sachverhalte dar. Bei der Betrachtung von AP und BP im gleichen, festen kartesischen Koordinatensystem vereinfachen sich viele Terme in den betrachteten Gleichungen. Darüber hinaus kann mit Hilfe eines CAD-Programmes (CAD: Computer Aided Design) ein Gitter aufgebaut werden, das dem betrachteten Volumen genau entspricht.

3.2.1.1 Berechnung in kart. Koordinaten

Wie bereits beschrieben, vereinfachen sich bestimmte Ausdrücke in den schwachen Formulierungen bei Verwendung kartesischer Koordinaten. Die Ortsunabhängigkeit der Basisvektoren sowie deren Orthogonalität führt zu folgenden wichtigen Identitäten:

$$\Psi_{;j} = \frac{\partial \Psi}{\partial X^j} \quad \text{und} \quad \mathbf{G} = \mathbb{I}. \quad (3.17)$$

Die schwachen Formulierungen in kartesischen Koordinaten mit finiten Differenzen für die Zeitableitungen lauten:

$$\int_V \rho_0 \frac{1}{(\Delta t)^2} (u^i - 2u_0^i + u_{00}^i) \delta u^i dV + \int_V P^{ik} \frac{\partial \delta u^i}{\partial X^k} dV = 0 \quad (3.18)$$

und

$$\begin{aligned} \int_V \rho_0 c \frac{1}{\Delta t} (T - T_0) \delta T dV - \int_V P^{ik} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^i}{\partial Z^k} - \frac{\partial u_0^i}{\partial Z^k} \right) \delta T dV - \int_V \rho_0 r \delta T dV \\ - \int_V Q^i \frac{\partial (\delta T)}{\partial Z^i} dV + \oint_{\partial V} \delta T h (T - T_{\text{umg}}) dA = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entsprechend werden auch die Definitionen der Größen an die Berechnung in kartesischen Koordinaten angepasst.

3.2.1.2 Gitter eines Rohres in kart. Koordinaten

Um ein Gitter zu erstellen, das bei der Berechnung in kartesischen Koordinaten ein Rohr beschreibt, kann mit einer CAD-Software eine entsprechende Geometrie entworfen und vernetzt werden. Dazu wurde im Rahmen dieses Projektes die OpenSource-Software *Gmsh* verwendet [GR14]. Das daraus resultierende Gitter, welches ca. 20000 Elemente aufweist, wurde in den Programmcode eingebunden. Die folgende Abbildung zeigt ein CAD-Modell des vernetzten Rohres:

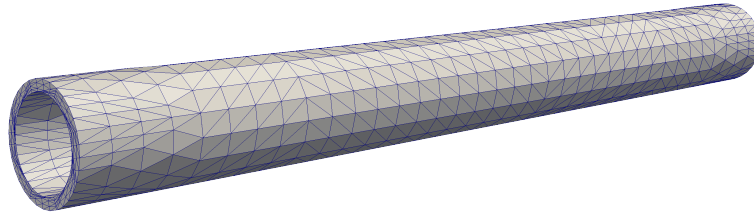


Abb. 3.2: Vernetztes Rohr in kart. Koordinaten

3.2.1.3 Berechnung in Zylinderkoordinaten

Die Simulation des Laserschweißens eines Rohres kann neben der Berechnung in kartesischen Koordinaten auch in Zylinderkoordinaten geschehen. Die Berechnung in Zylinderkoordinaten (mit der Basis (r, ϕ, z)) hat den entscheidenden Vorteil, dass durch deren Verwendung ein exakt rundes Rohr modelliert werden kann, während bei einer Vernetzung des CAD-Modells in kartesischen Koordinaten die Rundung nur stückchenweise angenähert werden kann. Der Nachteil der Berechnung in Zylinderkoordinaten liegt in der Ortsabhängigkeit der Koordinaten. Die folgenden Identitäten werden hier in die Bilanzgleichungen eingesetzt:

$$\Psi_{;j}^i = \frac{\partial \Psi^i}{\partial Z^j} + \Psi^k \Gamma_{jk}^i \quad \text{und} \quad \Psi_{i;j} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial Z^j} - \Psi^k \Gamma_{ij}^k. \quad (3.20)$$

Die Christoffelsymbole zweiter Art Γ_{jk}^i beschreiben die ortsabhängige Änderung der Basisvektoren. In Zylinderkoordinaten tritt eine derartige Änderung nur in wenigen Richtungen auf. Die einzigen von Null verschiedenen Einträge der Christoffelsymbole sind hier:

$$\Gamma_{22}^1 = -r \quad \text{und} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (3.21)$$

Auch bei den ko- und kontravarianten Metriktensoren sind jeweils nur wenige Einträge ungleich Null. Diese lauten:

$$G^{11} = 1, \quad G^{22} = \frac{1}{r^2} \quad \text{und} \quad G^{33} = 1 \quad \text{sowie} \quad G_{11} = 1, \quad G_{22} = r^2 \quad \text{und} \quad G_{33} = 1. \quad (3.22)$$

Die schwachen Formulierungen der Bilanzgleichungen in Zylinderkoordinaten ergeben sich also zu:

$$\int_V \rho_0 \frac{1}{(\Delta t)^2} (u^i - 2u_0^i + u_{00}^i) G_{ji} \delta u^j dV + \int_V P^{ik} G_{ji} \left(\frac{\partial \delta u^j}{\partial Z^k} + \delta u^l \Gamma_{kl}^j \right) dV = 0 \quad (3.23)$$

und

$$\begin{aligned} \int_V \rho_0 c \frac{1}{\Delta t} (T - T_0) \delta T dV - \int_V P^{ik} G_{ij} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial w^j}{\partial Z^k} + u^l \Gamma_{kl}^j - \frac{\partial u_0^j}{\partial Z^k} - u_0^l \Gamma_{kl}^j \right) \delta T dV \\ - \int_V \rho_0 r \delta T dV - \int_V Q^i \frac{\partial(\delta T)}{\partial Z^i} dV + \oint_{\partial V} \delta T h (T - T_{\text{umg}}) dA = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2.1.4 Gitter in Zylinderkoordinaten

Die Darstellung eines Rohres in Zylinderkoordinaten ist eine Platte mit den Abmaßen *Wandstärke* x 2π x *Länge des Rohres*. In der Richtung ϕ verhält sich diese Platte periodisch mit der Periode 2π . Eine derartige Platte kann ohne weiteres im Programm selbst erstellt und nach vorgegebenen Parametern vernetzt werden. Nach der Lösung des Problems in jedem Zeitschritt kann dann das Gitter zusammen mit dem Ergebnis wieder in kartesische Koordinaten transformiert werden.

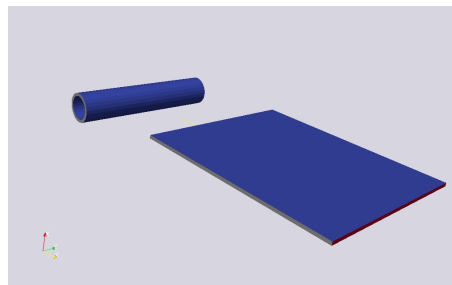


Abb. 3.3: Gitter in Zylinderkoordinaten mit Transformation in kartesische Koordinaten

3.3 Implementierung des Problems

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Grundlagen dargestellt, die notwendig sind, um das Laserschweißen eines Rohres rechnergestützt zu simulieren. Zur Implementierung derartiger Probleme wurde in diesem Projekt das Paket FEniCS benutzt. Bei FEniCS handelt es sich um eine Erweiterung der Programmiersprache Python. Das folgende Struktogramm zeigt die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Implementierung einer FEM-Berechnung mit FEniCS:

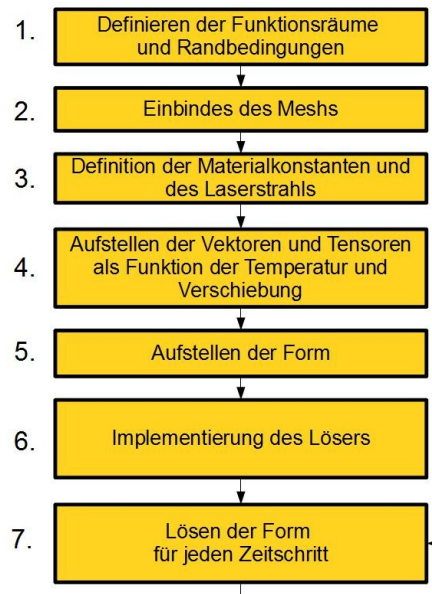


Abb. 3.4: Implementierung Struktogramm

4 Auswertung

Im Rahmen des hier vorgestellten Projektes ist ein funktionierendes Programm für die Simulation des Laserschweißens bei einem Rohr entstanden. In diesem Programm wird der zeitliche und örtliche Verlauf der Temperatur und der Verschiebung durch die Einwirkung eines bewegten Lasers in kartesischen Koordinaten berechnet. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind folgenden Abschnitt 4.1 dargestellt. Ein kommentierter Programmcode selbst ist an diesen Bericht angehängt. Es ist bis zum Zeitpunkt der Abgabe dieses Berichtes nicht gelungen, ein funktionsfähiges Programm für die Berechnung in Zylinderkoordinaten zu erstellen.

4.1 Ergebnisse für kart. Rechnung

Mit dem erstellten Programm zur Simulation des Laserschweißens lassen sich die Temperatur- und Verschiebungsverläufe auf dem Rohr ausrechnen und mithilfe von der OpenSource-Software *Paraview* visualisieren [Kit14]. In der folgenden Abbildung sind die Ergebnisse für Temperatur (links) und Verschiebung (rechts) dargestellt:

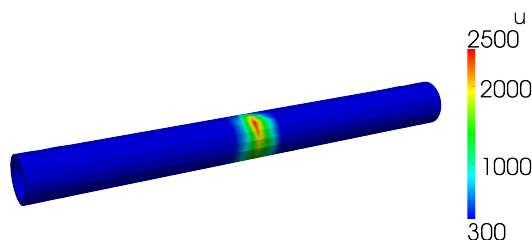


Abb. 4.1: Temperaturverteilung für kart. Rechnung in Kelvin

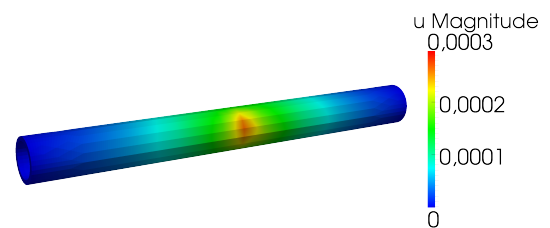


Abb. 4.2: Verschiebungen für kart. Rechnung in Metern

4.2 Vergleich und Schlussfolgerungen

Das Programm, welches mit kartesischen Koordinaten rechnet und das Programm, welches mit Zylinderkoordinaten rechnet, liefern weitestgehend plausible Ergebnisse. Allerdings unterscheiden sich diese Ergebnisse auch signifikant. Ein kritischer Fehler in den Programmen konnte bis zu diesem Zeitpunkt nicht festgestellt werden. Ein Vergleich zu den Temperatur- und Verschiebungsverhältnissen in der Realität, würde helfen die entsprechenden Modelle zu validieren und zu verifizieren.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel des hier beschriebenen Projektes war die Erstellung eines Programmes zur Simulation des Laserschweißprozesses bei einem Rohr. Mit den beschriebenen Grundlagen und Annahmen ist es gelungen, ein solches Programm mit Hilfe von OpenSource-Software zu erstellen. Die Ergebnisse dieses Programmes konnten allerdings noch nicht durch eine reale Messung verifiziert werden.

Ein zusätzliches, selbstgestecktes Ziel, das aus Interesse im Verlauf des Projektes entstand, war die Simulation eines solchen Prozesses basierend auf der Berechnung in Zylinderkoordinaten. Durch die allgemeine, koordinatenunabhängige Formulierung der verwendeten Bilanzgleichungen ist hierfür eine sehr gute Grundlage geschaffen worden. Zum jetzigen Zeitpunkt scheint auch die Umsetzung zu einem funktionierenden Programm nur noch wenige Schritte entfernt zu liegen.

Eine nichtlinear elastische Beschreibung, wie sie hier versucht wurde, wäre ein wesentlicher Schritt hin in Richtung einer verlässlichen Simulation des Laserschweißprozesses von rotations-symmetrischen Gegenständen. Es ist zu hoffen, dass aufbauend auf dieses Projekt Weitere sich dieser Idee annehmen und so vielleicht diesen Schritt gehen können.

Literaturverzeichnis

- [Ber05] BERTRAM, A.: *Elasticity and plasticity of large deformations: An introduction*. Berlin and New York : Springer, 2005. – ISBN 978–3–540–24033–4
- [Che11] CHENG L., LOFINK, K., MAUCHER F.: *Temperatureentwicklung beim Laserschweißen: Simulationstools und ihre Anwendung - Simulation der Temperaturverteilung beim Laserschweißen von dünnen Blechen*. http://www.ifm.tu-berlin.de/fileadmin/fg49/AbschlussarbeitundProjekte/simulation/Projekt_Cheng_Lofink_Maucher_Temperaturentwicklung_beim_Laserschweissen.pdf. Version: 2011
- [Dre11] DREYER, W.: *Projekt Grundlagen der Kontinuumsmechanik I & Tensoranalysis*. 2011
- [GR14] GEUZAINÉ, C. ; REMACLE, J. F.: *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. <http://geuz.org/gmsh/>. Version: 2014
- [Kit14] KITWARE INC.: *Paraview: multi-platform data analysis and visualization application*. www.paraview.org. Version: 2014
- [LMW12] LOGG, Anders ; MARDAL, Kent-Andre ; WELLS, Garth: *Lecture notes in computational science and engineering*. Bd. 84: *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*. Berlin and New York : Springer, 2012. – ISBN 978–3–642–23098–1
- [Mül11] MÜLLER, W. H.: *Streifzüge durch die Kontinuumsmechanik*. Springer, 2011 <http://books.google.de/books?id=x8VqmAEACAAJ>. – ISBN 9783642198694
- [Ste07] STEPHAN, Peter: *Thermodynamik*. 17. Aufl. Berlin and Heidelberg and New York : Springer, 2007 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 3540708138
- [Wel14] WELDINGMACHINES.ORG ; [HTTP://WWW.WELDINGMACHINES.ORG](http://www.weldingmachines.org) (Hrsg.): http://www.weldingmachines.org/wp-content/uploads/2010/08/laser_welding.jpg. 2014
- [Wil03] WILLNER, Kai: *Kontinuums- und Kontaktmechanik: Synthetische und analytische Darstellung ; mit 26 Tabellen*. Berlin and Heidelberg and New York and Hongkong and London and Mailand and Paris and Tokio : Springer, 2003 (Engineering online library). – ISBN 3–540–43529–8

Anhang

Programmcode für kart. Rechnung

```

from dolfin import *
parameters["form_compiler"]["cpp_optimize"]=True

#####
#   Einbinden des Gitters und   #
#           Festlegen der Funktionsräume           #
#-----#
#####

mesh = Mesh("rohr.xml")
Space_U = VectorFunctionSpace(mesh, "Lagrange", 1)
Space_T = FunctionSpace(mesh, "Lagrange", 1)
Space_W = MixedFunctionSpace([Space_U, Space_T])

#####
#   Rand- und Anfangsbedingungen   #
#   definieren           #
#-----#
#####

rand = MeshFunction("size_t", mesh, "rohr_facet_region.xml")

u0_left = Constant((0.0, 0.0, 0.0))
u0_right = Constant((0.0, 0.0, 0.0))

bc1 = DirichletBC(Space_W.sub(0), u0_left, rand, 1)
bc2 = DirichletBC(Space_W.sub(0), u0_right, rand, 2)

bcs = [bc1, bc2]

Null_vector=Expression(("0.0", "0.0", "0.0"))
Null_scalar=Expression("290")
Tumg_scalar=Expression("290")

```

```

T0=interpolate(Null_scalar, Space_T)
T_0=interpolate(Null_scalar, Space_T)
Tumg=interpolate(Tumg_scalar, Space_T)
u0=interpolate(Null_vector, Space_U)
u00=interpolate(Null_vector, Space_U)

t=0
tend=5
delt=0.1
dt2=pow(delt,2)

#*****#
#          Festlegen der Konstanten          #
#-----#
#*****#

rho_S = Constant(7700)
E_S = 2.1e11
nu_S = 0.3
c_S = 477
kappa_S= 50
alpha=30
ausdi=12e-06

Kompri_S=E_S/(3*(1.-2.*nu_S))
lamda_S = E_S * nu_S / ((1.+nu_S)*(1.-2.*nu_S))
my_S = E_S / (2.*(1.+nu_S))

#*****#
#          Laser          #
#-----#
#*****#

a=0.01
b=0.01
c=0.01

x0=Expression("0.025*sin(ttrac)",ttrac=t)
y0=Expression("0.025*cos(ttrac)",ttrac=t)
z0=0.25

```

```
Laser=Expression('4.0e4*exp(-(pow((x[0]-0.025*sin(ttrac)),2))/(pow(a,2)))
... -(pow((x[1]-0.025*cos(ttrac)),2))/(pow(b,2)) \
... -(pow(x[2]-z0,2) / pow(c,2) ) )',ttrac=t,a=a, b=b, z0 = z0, c = c)
```

```
#####
#                               #
#-----#
#####
```

```
X = Function(Space_W)
u,T = split(X)
dX = TrialFunction(Space_W)
du,dT = split(dX)
tX = TestFunction(Space_W)
tu,tT = split(tX)
```

```
i,j,k,l = indices(4)
```

```
delta= Identity(3)
```

```
def DefGrad(u):
return variable( as_tensor( delta[i,j] + u[i].dx(j) , (i,j)))
```

```
def InvGrad(u):
return variable( as_tensor(inv(DefGrad(u))[i,j] , (i,j)))
```

```
def J_Grad(u):
return variable(det(DefGrad(u)))
```

```
def rechter_green(u):
return variable (as_tensor(DefGrad(u)[k,i]*DefGrad(u)[k,j] , (i,j)))
```

```
def E_green(u):
return variable (as_tensor(0.5*(rechter_green(u)[i,j]
-delta[i,j]), (i,j)))
```

```
def SK(u,T):
return variable( as_tensor(((lamda_S*E_green(u)[k,k]*delta[i,j] \
```

```

...+2.0*my_S*E_green(u)[i,j] -Kompri_S*ausdi*(T-T_0) \
...*delta[i,j] ), (i,j))

def PK(u,T):
return variable( as_tensor(DefGrad(u)[i,l]*SK(u,T)[l,k], (i,k))

def Q(u,T):
return variable( as_tensor(J_Grad(u)*inv(rechter_green(u))[j,k] \
...*(kappa_S)*T.dx(k), (j,))

n=FacetNormal(mesh)

#*****#
#                               #
#-----#
#*****#

# Aenderung der Innere Energie:
Inne=(rho_S*c_S* ((dT-T0)/delt)*tT)*dx

# Wärmefluss im inneren des betrachteten Volumens:
Fluinn=(Q(du,dT)[k]*(tT).dx(k))*dx

# Einwirkung des Lasers:
La = - (rho_S*Laser*tT)*dx

# Spannungsleistung:
#Spalei= (-PK(du,dT)[i,k]*tT*(du[i].dx(k)
- u0[i].dx(k)) * 1./delt )*dx
Spalei= (-SK(du,dT)[i,k]*tT*(E_green(du)[i,k] - E_green(u0)[i,k])
* 1./delt )*dx #Indizes??

#Waermefluss der Umgebung:
Fluumg= (alpha*(dT-Tumg)*tT)*ds

#Impuls
Impu= (rho_S *(1/dt2)*(du[i]-2*u0[i]+u00[i])*tu[i])*dx

#Spannungsarbeit

```



```

Sparbeit=(PK(du,dT)[i,k]*tu[i].dx(k))*dx

#*****#
#               Loeser           #
#-----#
#*****#

#Zusammenfuegen ohne Laser
F=  Inne + Fluinn + Spalei + Fluumg + Impu + Sparbeit + La
F = action(F,X)
J  = derivative(F, X, dX)

b, A = None, None

class MyNonlinearProblem(NonlinearProblem):
def __init__(self, L, a, bcs, subs):
NonlinearProblem.__init__(self)
self.L = L
self.a = a
self.bcs = bcs
self.subs = subs
def F(self, b, x):
assemble(self.L, tensor=b, exterior_facet_domains=self.subs)
for condition in self.bcs: condition.apply(b,x)
def J(self, A, x):
assemble(self.a, tensor=A, exterior_facet_domains=self.subs)
for condition in self.bcs: condition.apply(A)

problem = MyNonlinearProblem(F,J,bcs,rand)

solver = NewtonSolver()
prm = solver.parameters
prm['absolute_tolerance'] = 1E-4
prm['relative_tolerance'] = 1E-3
prm['maximum_iterations'] = 25
prm['relaxation_parameter'] = 1.0

file_T = File("SchweissTemp/resultT.pvd")
file_u = File("SchweissVersch/resultu.pvd")

```

```
#####  
#                               Zeitschleife mit Loeser           #  
#-----#  
#####  
while t <= tend:  
print "Zeitpunkt:", t  
  
problem = MyNonlinearProblem(F,J,bcs,rand)  
  
#set_log_level(PROGRESS)  
  
solver.solve(problem, X.vector())  
  
u00.assign(u0)  
T0.assign(X.split()[1])  
u0.assign(X.split()[0])  
  
t=t+delt  
Laser.ttrac = t  
file_T << X.split()[1]  
file_u << X.split()[0]
```

