

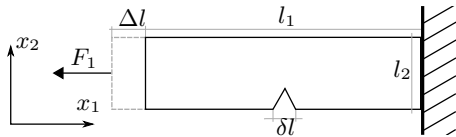
Numerische Berechnung der Rissen durch die Benutzung der singulären Bilanzgleichungen

Dr.-Ing. B. Emek Abali

Technische Universität Berlin
Institut für Mechanik
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie, LKM

Oberwiesenthal, 29.09.2014

Ziel



* http://www.metalconsult.com/images/thread_of_a_stainless_steel_stud_large.jpg

Inhalt

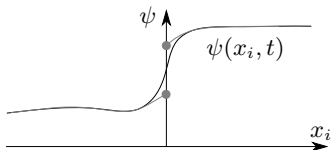
- ▶ Die singulären Bilanzgleichungen (ohne Eigenleben)
- ▶ Implementierung in die finite Elementenmethode
- ▶ Ergebnisse

Inhalt

- ▶ Die singulären Bilanzgleichungen (ohne Eigenleben)
- ▶ Implementierung in die finite Elementenmethode
- ▶ Ergebnisse

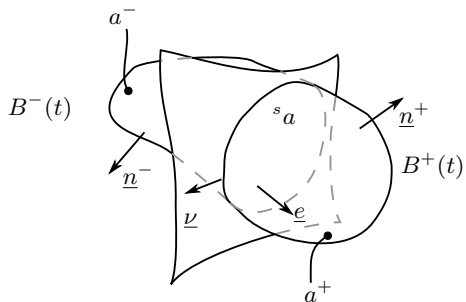
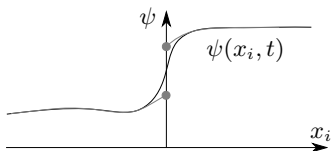
Singuläre Felder (I)

Darstellung eines singulären Feldes in Kontinuum



Singuläre Felder (I)

Darstellung eines singulären Feldes in Kontinuum



Die allgemeine Bilanzgleichung (I)

$$\underbrace{\Psi}_{\Psi: \text{bilanzierende Gr\ddot{o}\ss e}} = \underbrace{M}_{\text{konvektiver Zufluss}} + \underbrace{F}_{\text{Zufluss}} + \underbrace{P}_{\text{Produktion}} + \underbrace{S}_{\text{Zufuhr (Supply)}}$$

In der aktuellen Konfiguration:

$$\left(\int_{\mathbb{B}^+ \cup \mathbb{B}^-} {}^{\mathbb{B}}\psi \, dv + \int_{s_a} {}^a\psi \, da \right)' = \int_{a^+ \cup a^-} {}^{\mathbb{B}}\psi(w_i - v_i)n_i \, da + \int_{\partial s_a} {}^a\psi(w_i - v_i)\nu_i \, dl -$$

$$- \int_{a^+ \cup a^-} {}^a\phi_k n_k \, da - \int_{\partial s_a} {}^{\ell}\phi_k \nu_k \, dl + \int_{\mathbb{B}^+ \cup \mathbb{B}^-} {}^{\mathbb{B}}s \, dv + \int_{s_a} {}^as \, da$$

Die allgemeine Bilanzgleichung (II)

Nach der Anwendung der Transporttheoreme, in der Referenzkonfiguration:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{B}_0^+ \cup \mathcal{B}_0^-} \left({}^{\mathcal{B}}\psi \cdot J + {}^{\mathcal{B}}\psi \frac{\partial J w_i (\mathbf{F}^{-1})_{ki}}{\partial X_k} - \frac{\partial}{\partial X_p} \left({}^{\mathcal{B}}\psi (w_k - v_k) - {}^a\phi_k \right) J (\mathbf{F}^{-1})_{pk} - \right. \\
 & \left. - {}^{\mathcal{B}}s J \right) dV = \int_{sA} \left(- {}^a\psi \sqrt{\frac{g}{G}} - {}^a\psi (w_{;\alpha}^\alpha - 2K_m w_\perp) \sqrt{\frac{g}{G}} + \left(({}^a\psi (w_k - v_k) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - {}^\ell\phi_k) F_{k\Delta} \right)_{;\Delta} + {}^a s \sqrt{\frac{g}{G}} \right) dA + \int_{sA} \left[({}^{\mathcal{B}}\psi (w_k - v_k) - {}^a\phi_k) J (\mathbf{F}^{-1})_{pk} \right] E_p dA
 \end{aligned}$$

Die allgemeine Bilanzgleichung (III)

	${}^{\mathcal{B}}\psi$	${}^a\psi$	${}^a\phi_k$	${}^{\ell}\phi_k$	${}^{\mathcal{B}}s$	as
Massenbilanz	${}^{\mathcal{B}}\rho$	${}^a\rho$	0	0	0	0
Impulsbilanz	${}^{\mathcal{B}}\rho {}^{\mathcal{B}}v_i$	${}^a\rho {}^av_i$	σ_{ki}	${}^{\ell}\sigma_{ki}$	${}^{\mathcal{B}}\rho f_i$	${}^a\rho f_i$

Die allgemeine Bilanzgleichung (III)

	${}^{\mathcal{B}}\psi$	${}^a\psi$	${}^a\phi_k$	${}^{\ell}\phi_k$	${}^{\mathcal{B}}s$	as
Massenbilanz	${}^{\mathcal{B}}\rho$	${}^a\rho$	0	0	0	0
Impulsbilanz	${}^{\mathcal{B}}\rho {}^{\mathcal{B}}v_i$	${}^a\rho {}^av_i$	σ_{ki}	${}^{\ell}\sigma_{ki}$	${}^{\mathcal{B}}\rho f_i$	${}^a\rho f_i$

Annahme: Ohne Eigenleben, ${}^a\rho = 0$.

Die allgemeine Bilanzgleichung (III)

	${}^{\mathcal{B}}\psi$	${}^a\psi$	${}^a\phi_k$	${}^\ell\phi_k$	${}^{\mathcal{B}}s$	${}^a s$
Massenbilanz	${}^{\mathcal{B}}\rho$	${}^a\rho$	0	0	0	0
Impulsbilanz	${}^{\mathcal{B}}\rho {}^{\mathcal{B}}v_i$	${}^a\rho {}^a v_i$	σ_{ki}	${}^\ell\sigma_{ki}$	${}^{\mathcal{B}}\rho f_i$	${}^a\rho f_i$

Annahme: Ohne Eigenleben, ${}^a\rho = 0$.

Massenbilanz:

$$\rho_0 = \rho J ,$$

$$[\rho J (w_k - v_k) (\mathbf{F}^{-1})_{ik}] E_i = 0 .$$

Impulsbilanz:

$$\rho J \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial P_{ki}}{\partial X_k} - \rho J f_i = 0 ,$$

$$({}^\ell\sigma_{ki} F_k^\Delta)_{;\Delta} = [(\rho J v_i (w_k - v_k) - J \sigma_{ki}) (F^{-1})_{pk}] E_p .$$

Die allgemeine Bilanzgleichung (IV)

Durch Einsetzen der Massenbilanz erhalten wir:

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \frac{\partial P_{ki}}{\partial X_k} - \rho_0 f_i = 0 ,$$

$$\left({}^\ell \sigma_{ki} F_{kl} \right)_{,m} G_{lm} - [P_{ki}] E_k = 0 .$$

* R. C. Cammarata; Surface and stress effects in thin films, Elsevier Science Ltd. 1994

Die allgemeine Bilanzgleichung (IV)

Durch Einsetzen der Massenbilanz erhalten wir:

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \frac{\partial P_{ki}}{\partial X_k} - \rho_0 f_i = 0 ,$$

$$\left({}^\ell \sigma_{ki} F_{kl} \right)_{,m} G_{lm} - [P_{ki}] E_k = 0 .$$

Materialgleichungen für Titan*:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} , \quad C_{ij} = F_{ki} F_{kj} , \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) ,$$

$$P_{kn} = F_{nl} S_{kl} , \quad S_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} ,$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} , \quad \mu = G , \quad E = 170 \text{ GPa} , \quad \nu = 0,39 ,$$

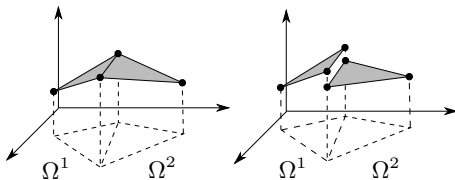
$${}^\ell \sigma_{ki} = f \delta_{ki} , \quad f = 2,574 \text{ J/m}^2$$

* R. C. Cammarata; Surface and stress effects in thin films, Elsevier Science Ltd. 1994

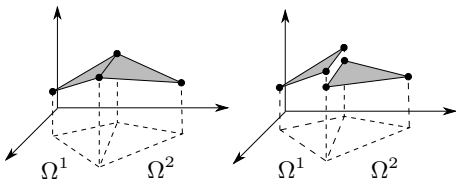
Inhalt

- ▶ Die singulären Bilanzgleichungen (ohne Eigenleben)
- ▶ Implementierung in die finite Elementenmethode
- ▶ Ergebnisse
- ▶ Ausblick

Diskontinuierliche Galerkin Methode (I)



Diskontinuierliche Galerkin Methode (I)



Unstetige *lineare* Elemente für singulären Flächen ohne Krümmung:

$$G_{ij} = \delta_{ij} ,$$

$$({}^{\ell}\sigma_{ki}F_{kl})_{,m} \delta_{lm} - [P_{ki}] E_k = 0 ,$$

$$[P_{ki}] E_k = ({}^{\ell}\sigma_{ki}F_{kl})_{,l} .$$

Diskontinuierliche Galerkin Methode (II)

Die schwache Form für die stationäre Impulsbilanz:

$$P_{ki,k} = f_i, (\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial X_i}, K_{ij} = u_{i,j},$$

Diskontinuierliche Galerkin Methode (II)

Die schwache Form für die stationäre Impulsbilanz:

$$\begin{aligned}
 P_{ki,k} &= f_i, \quad (\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial X_i}, \quad K_{ij} = u_{i,j}, \\
 \int_{\Omega^e} (P_{ki} \delta u_{i,k} - f_i \delta u_i) dV - \int_{\partial\Omega^e} \hat{P}_{ki} \delta u_i N_k dA &= 0, \\
 \int_{\Omega^e} (K_{ij} \delta K_{ij} + u_i \delta K_{ij,j}) dV - \int_{\partial\Omega^e} \hat{u}_i \delta K_{ij} N_j dA &= 0.
 \end{aligned}$$

Diskontinuierliche Galerkin Methode (II)

Die schwache Form für die stationäre Impulsbilanz:

$$P_{ki,k} = f_i, (\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial X_i}, K_{ij} = u_{i,j},$$

$$\int_{\Omega^e} (P_{ki} \delta u_{i,k} - f_i \delta u_i) dV - \int_{\partial\Omega^e} \hat{P}_{ki} \delta u_i N_k dA = 0,$$

$$\int_{\Omega^e} (K_{ij} \delta K_{ij} + u_i \delta K_{ij,j}) dV - \int_{\partial\Omega^e} \hat{u}_i \delta K_{ij} N_j dA = 0.$$

Durch Einsetzen $\delta K_{ij} = \delta u_{i,j}$

$$F = \int_{\Omega^e} (P_{ki} \delta u_{i,k} - f_i \delta u_i + u_{i,j} \delta u_{i,j} + u_i \delta u_{i,j,j}) dV -$$

$$- \int_{\partial\Omega^e} (\hat{P}_{ji} \delta u_i N_j + \hat{u}_i \delta u_{i,j} N_j) dA,$$

Diskontinuierliche Galerkin Methode (III)

nach der partiellen Integration für das ganze Gebiet:

$$F = \sum_{e=1}^{n^{ele}} \left(\int_{\Omega^e} (P_{ki} \delta u_{i,k} - f_i \delta u_i) dV + \int_{\partial\Omega^e} (-\hat{P}_{ji} \delta u_i + (u_i - \hat{u}_i) \delta u_{i,j}) N_j dA \right).$$

Diskontinuierliche Galerkin Methode (III)

nach der partiellen Integration für das ganze Gebiet:

$$F = \sum_{e=1}^{n^{ele}} \left(\int_{\Omega^e} (P_{ki} \delta u_{i,k} - f_i \delta u_i) dV + \int_{\partial\Omega^e} (-\hat{P}_{ji} \delta u_i + (u_i - \hat{u}_i) \delta u_{i,j}) N_j dA \right).$$

Was sind \hat{u}_i und \hat{P}_{ij} ?

Diskontinuierliche Galerkin Methode (III)

nach der partiellen Integration für das ganze Gebiet:

$$F = \sum_{e=1}^{n^{ele}} \left(\int_{\Omega^e} (P_{ki} \delta u_{i,k} - f_i \delta u_i) dV + \int_{\partial\Omega^e} (-\hat{P}_{ji} \delta u_i + (u_i - \hat{u}_i) \delta u_{i,j}) N_j dA \right).$$

Was sind \hat{u}_i und \hat{P}_{ij} ? In kontinuierlicher FEM: $\hat{u}_i = u_i$ und $\hat{P}_{ij} = P_{ij}$

Diskontinuierliche Galerkin Methode (III)

nach der partiellen Integration für das ganze Gebiet:

$$F = \sum_{e=1}^{n^{ele}} \left(\int_{\Omega^e} (P_{ki} \delta u_{i,k} - f_i \delta u_i) dV + \int_{\partial\Omega^e} (-\hat{P}_{ji} \delta u_i + (u_i - \hat{u}_i) \delta u_{i,j}) N_j dA \right).$$

Was sind \hat{u}_i und \hat{P}_{ij} ? In kontinuierlicher FEM: $\hat{u}_i = u_i$ und $\hat{P}_{ij} = P_{ij}$

Wir schlagen für diskontinuierliche FEM vor:

$$u_i = \hat{u}_i, \quad \hat{P}_{ji} = P_{ji} - \eta \llbracket u_i \rrbracket, \quad \llbracket u_i \rrbracket = (u_i^+ N_j^+ + u_i^- N_j^-),$$

weil

$$\llbracket \hat{P}_{ji} \rrbracket = -[P_{ji}] E_j = -(\ell \sigma_{ki} F_{kl})_{,l}.$$

Diskontinuierliche Galerkin Methode (IV)

Mit einer kurzen Rechnung und Einführung: $\{P_{ji}\} = \frac{1}{2}(P_{ji}^+ + P_{ji}^-)$

$$F = \int_{\Omega} (P_{ji}\delta u_{i,j} - f_i\delta u_i) dV + \int_{\Gamma} \left(\{\delta u_i\} (\ell \sigma_{ki} F_{kj})_{,j} - \{P_{ji}\} \llbracket \delta u_i \rrbracket + \llbracket u_i \rrbracket \eta \llbracket \delta u_i \rrbracket \right) dS - \int_{\partial\Omega} P_{ji} N_j \delta u_i dA$$

wird unter FEniCS implementiert.

Diskontinuierliche Galerkin Methode (IV)

Mit einer kurzen Rechnung und Einführung: $\{P_{ji}\} = \frac{1}{2}(P_{ji}^+ + P_{ji}^-)$

$$F = \int_{\Omega} (P_{ji}\delta u_{i,j} - f_i\delta u_i) dV + \int_{\Gamma} \left(\{\delta u_i\} (\ell \sigma_{ki} F_{kj})_{,j} - \{P_{ji}\} \llbracket \delta u_i \rrbracket + \llbracket u_i \rrbracket \eta \llbracket \delta u_i \rrbracket \right) dS - \int_{\partial\Omega} P_{ji} N_j \delta u_i dA$$

wird unter FEniCS implementiert. Was ist η ?

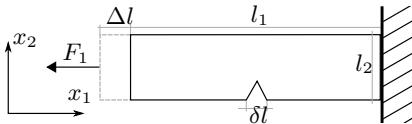
$$\hat{P}_{ji} = P_{ji} - \eta \llbracket u_i \rrbracket .$$

Inhalt

- ▶ Die singulären Bilanzgleichungen (ohne Eigenleben)
- ▶ Implementierung in die finite Elementenmethode
- ▶ **Ergebnisse**

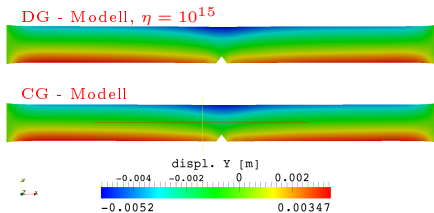
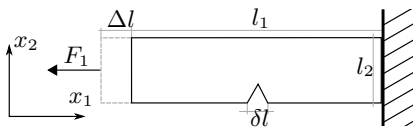
Ergebnisse (I)

Bestimmung von η



Ergebnisse (I)

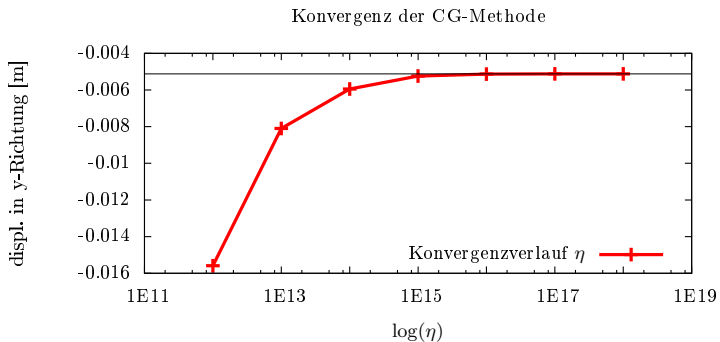
Bestimmung von η



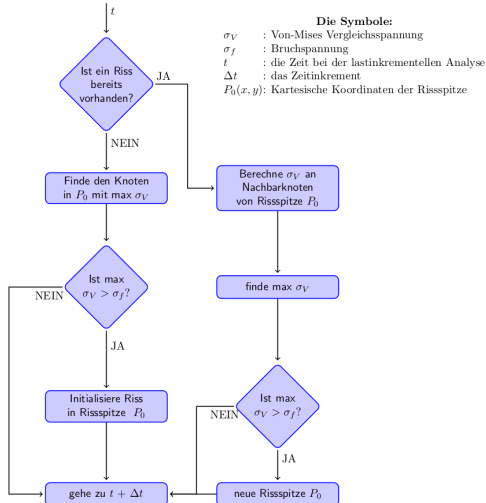
Vergleich der Balkendurchbiegung

Ergebnisse (II)

Bestimmung von η



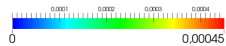
Ergebnisse (III)



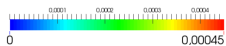
Ergebnisse (IV)



displ. Magnitude



displ. Magnitude



Zusammenfassung

- ▶ Die allgemeine Bilanzgleichung in der Referenzkonfiguration wurde hergeleitet.
- ▶ Massenbilanz und Impulsbilanz mit singulären Flächen ohne Eigenleben wurden implementiert.
- ▶ Eine FE-Berechnung ausschließlich mit Parametern aus den Messungen wurde durchgeführt.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!