Musterlösung 1. EM

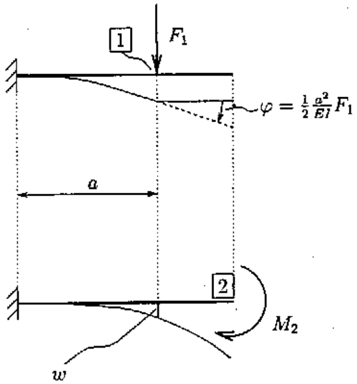
Theorieaufgaben

1. Für das skizzierte System (Bernoulli-Balken einseitig eingespannt) ist die Verschiebung w aufgrund des Moments M_2 gesucht, siehe untere Skizze.

   Für dasselbe System - allerdings unter der Last F_1 - kennen Sie den Winkel φ, siehe obere Skizze.

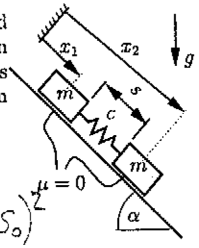
   Benutzen Sie den Satz von Maxwell und Betti bzw. $f_i = a_{ij}K_j$, um w zu ermitteln.

   $$w = \boxed{\frac{1}{2}\frac{a^2}{EI} M_2}$$



Geg.: a, EI, M_2 **(1 Punkt)**

2. Geben Sie für das nebenstehend skizzierte System die kinetische und potentielle Energie unter Verwendung der in der Skizze angebenen Größen an. Die Länge der Feder im entspannten Zustand sei s_0. Das Nullniveau der potentiellen Energie liegt im Schwerpunkt der oberen Masse.

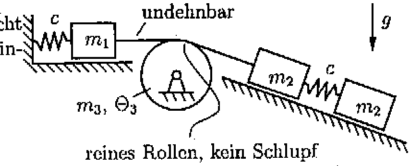


$$E_{kin} = \frac{m}{2}\left((\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 \right)$$

$$E_{pot} = -mg(x_2 - x_1)\sin\alpha + \frac{1}{2}c(s - s_0)^2$$

(2 Punkte)

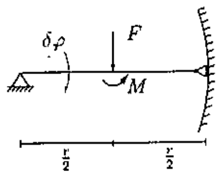
3. Wieviele generalisierte Koordinaten braucht man mindestens, um das skizzierte System eindeutig zu beschreiben?



Antwort: $\boxed{2}$

(1 Punkt)

4. Gegeben ist das System



Geben Sie die virtuelle Arbeit δW_F der Kraft F und δW_M des Moments M (inkl. der richtigen Vorzeichen) für eine virtuelle Verdrehung $\delta\varphi$ an.

$$\delta W_F = \frac{r}{2}\delta\varphi \cdot F$$

$$\delta W_M = -\delta\varphi \cdot M$$

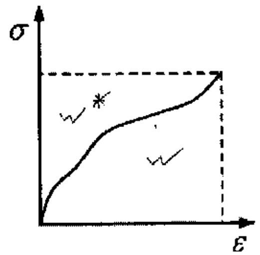
(1 Punkt)

5. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m s an:

Formänderungsenergie W	$\frac{kg\, m^2}{s^2}$
Lagrangefunktion L	$\frac{kg\, m^2}{s^2}$
Dehnsteifigkeit EA	$\frac{kg\, m}{s^2}$
virtuelle Verrückung δu	m

(2 Punkte)

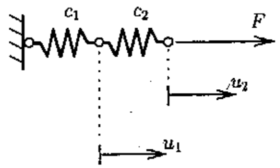
6. Kennzeichnen Sie im gegebenen Spannungs-Dehnungs-Diagramm die Formänderungsenergiedichte w und die komplementäre Formänderungsenergiedichte w^*. Unter welcher Vorraussetzung sind beide gleich groß?



Linear elastisch

(1 Punkt)

7. Geben Sie die Formänderungsenergie des Systems in Abhängigkeit der Verschiebungen u_i an. Bestimmen Sie die Verschiebung u_2 mit dem Satz von Castigliano. Geg.: F, c_1, c_2.



(2 Punkte)

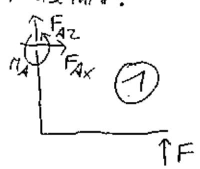
$$W = \frac{1}{2}c_1 u_1^2 + \frac{1}{2}c_2(u_2 - u_1)^2$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{F^2}{\left(\frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}\right)} \Rightarrow u_2 = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{F(c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}$$

Musterlösung 1. Klausur Energiemethoden 2009

1

a) Freischnitt:



(1)

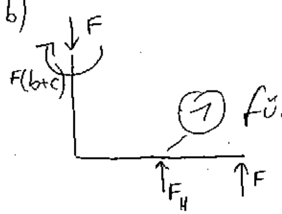
$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad F_{Az} = -F$

$\sum M^{(A)} = 0: \quad M_A = -F(b+c)$

(1)

b)

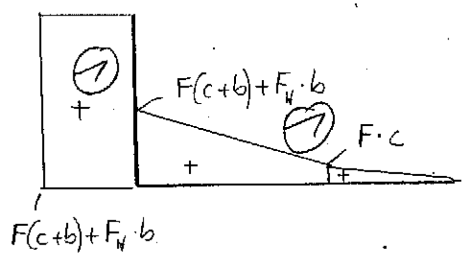


(1) für Hilfskraft

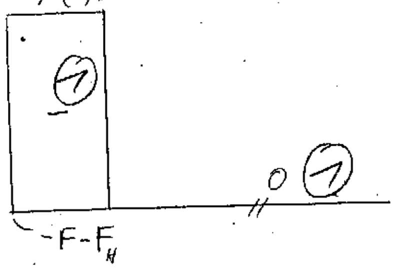
$$W = \frac{1}{2EA}\int_0^l N^2(x)\,dx + \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2(x)\,dx$$

(1) für Berücksichtigung von $N(x)$ & $M(x)$

M(x):



N(x):



$$W = \frac{1}{2EA}\,a\cdot(F+F_H)^2 + \frac{1}{2EI}\cdot a\left[F(c+b)+F_H\cdot b\right]^2$$
$$+\frac{1}{2EI}\,b\,\frac{1}{6}\Big(2\left[F(c+b)+F_H\cdot b\right]^2 + 2\left[Fc\right]^2$$
$$+2\left[F(c+b)+F_H\cdot b\right]\left[F\cdot c\right]\Big)$$
$$+\frac{1}{3}\,c\,(Fc)^2$$

(2)

$$\delta = \left.\frac{\partial W}{\partial F_H}\right|_{F_H=0} = \frac{aF}{EA} + \frac{1}{EI}\left(a\cdot b\cdot(c+b)F + \frac{1}{3}b^2F(c+b) + \frac{1}{6}b^2Fc\right)$$

(1) für Ableitung

(1) für $F_H = 0$

$$F = \frac{d}{\frac{a}{EA} + \frac{1}{EI}\left(ab(c+d) + \frac{1}{3}b^2(c+b) + \frac{1}{6}b^2c\right)}$$

(1)

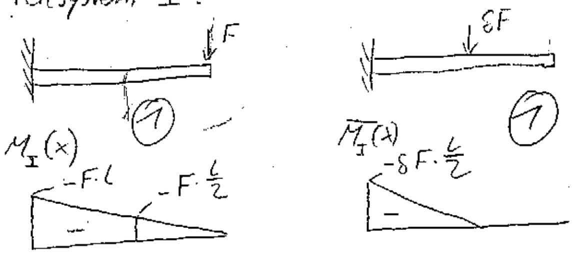
2

a) 4 Lagerkräfte

3 Gleichungen

$\Rightarrow$ 1-fach statisch unbestimmt (1)

b) Teilsystem I:

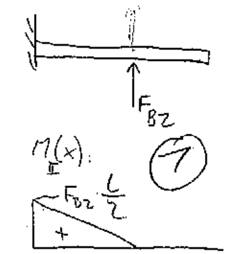


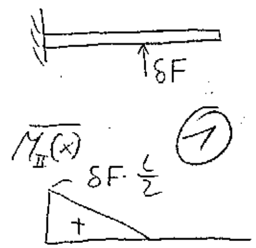
$\delta F = 1$

$$\delta_I = \frac{1}{EI}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(-\frac{l}{2}\right)\left(-2Fl - F\frac{l}{2}\right)$$
$$= \frac{5Fl^3}{48EI}$$

(1)

Teilsystem II:





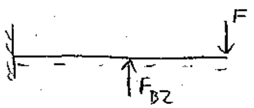
$$\delta_{II} = \frac{1}{EI}\,\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}\,F_{Bz}\,\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{F_{Bz}\,l^3}{24EI}$$

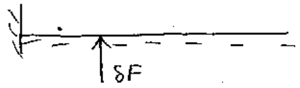
(1)

Superposition:

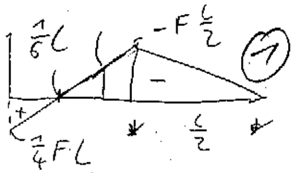
! $\delta_I - \delta_{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BZ} = \frac{5}{2} F$ (1) (1)

c)

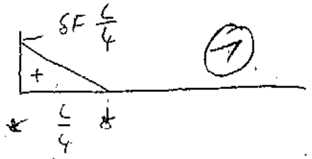




$M(x)$



(1)



(1)

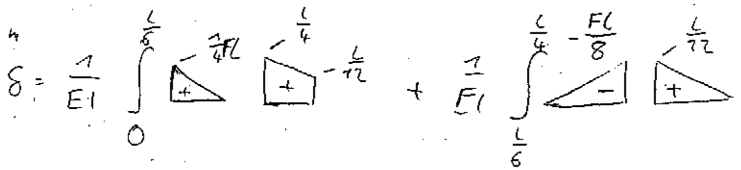
$0 \le x \le \frac{L}{4}: M(x) = \frac{1}{4}FL - x\frac{3}{2}F$ (1)

$M(x=\frac{L}{4}) = -\frac{FL}{8}$

$0 \le x < \frac{L}{4}: \quad M(x) = \frac{L}{4} - x$

$M(\frac{1}{6}L) = \frac{L}{12}$

$M(x)=0: x = \frac{1}{6}L$



(1)

$= \frac{1}{EI}\frac{L}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{4}FL\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{12}\right) - \frac{1}{EI}\frac{L}{12}\frac{1}{6}\frac{FL}{8}\cdot\frac{L}{12}$

$= \frac{FL^3}{EI}\frac{1}{256}$ + (1) Zusatzpunkt

3

a) $z = 6$

k: $\dot y_1 = 0$

$\omega_1 = 0$

$x_2 = x_1 + L\sin\varphi$

$y_2 = -L\cos\varphi$

$k = 4$

$f = z - k = 2$ (1)

b) $E_{pot} = -m_2 g L\cos\varphi + \frac{1}{2}c\,x^2$ (1) [Alternativ: ... $+ \frac{1}{2}c(x-s_0)^2$

$E_{kin} = \frac{1}{2}m_1\dot{\underline{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\underline{x}}_2^2$

$= \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}m^2(\dot x + L\cos(\varphi)\dot\varphi)^2$

$+ \frac{1}{2}m_2(L\sin(\varphi)\dot\varphi)^2$ (1)

$\underline{x}_2 = (x_1 + L\sin\varphi)\,\underline{e}_x - (L\cos\varphi)\,\underline{e}_y$

$\dot{\underline{x}}_2^2 = (\dot x + L\cos\varphi\,\dot\varphi)^2 + (L\sin(\varphi)\dot\varphi)^2$

$L = E_{kin} - E_{pot}$

$= m_2 g L\cos(\varphi) - \frac{1}{2}c\,x^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot x^2 + m_2\dot x L\cos(\varphi)\dot\varphi$

$+ \frac{1}{2}m_2 L^2\dot\varphi^2$ (1)

$Q_1 = -\kappa\dot x$ (1)

c) $\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m_2 L\cos(\varphi)\dot\varphi + (m_1+m_2)\dot x$ (1)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = -m_2 L\sin(\varphi)\dot\varphi^2 + m_2 L\cos(\varphi)\ddot\varphi + (m_1+m_2)\ddot x$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial x} = -c\,x$ (1)

$\Rightarrow -m_2 L\sin(\varphi)\dot\varphi^2 + m_2 L\cos(\varphi)\ddot\varphi + (m_1+m_2)\ddot x + c\,x = -\kappa\dot x$ (1)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m_2 \dot x l \cos(\varphi) + m_2 l^2 \dot\varphi \qquad 1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = m_2 \ddot x l \cos(\varphi) - m_2 \dot x l \sin(\varphi)\dot\varphi + m_2 l^2 \ddot\varphi \qquad 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 g l \sin(\varphi) - m_2 \dot x l \sin(\varphi)\dot\varphi \qquad 1$$

$$Q_\varphi = 0 \qquad 1$$

$$m_2 \ddot x l \cos(\varphi) - m_2 \dot x l \sin(\varphi)\dot\varphi + m_2 l^2 \ddot\varphi + m_2 g l \sin(\varphi) + m_2 \dot x l \sin(\varphi)\dot\varphi = 0$$

1