Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

LKM

WS 2010-2011 Energiemethoden der Mechanik. 1. Klausur - 1/2

Bitte deutlich in DRUCKSCHRIFT schreiben!

Name, Vorname:

Matr.-Nr.: Musterlösung

Studiengang:

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Bitte ankreuzen!

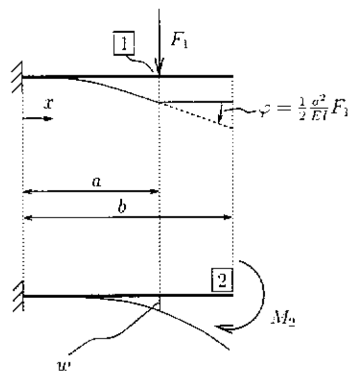
○ Studienbegleitende Prüfung ○ Übungsscheinklausur

Theorieaufgaben

1. Für das skizzierte System (BERNOULLI-Balken einseitig eingespannt) ist die Verschiebung nach unten entlang der Achse $w(x)$ aufgrund des Moments M_2 gesucht, siehe untere Skizze.

   Für dasselbe System - allerdings unter der Last F_1 - kennen Sie den Winkel $\varphi(x = b)$, siehe obere Skizze.

   Zeigen Sie mit dem Satz von MAXWELL und BETTI bzw. $f_i = \alpha_{ij} K_j$, dass die Auslenkung (Verschiebung) $w(x = a) = \frac{1}{2}\frac{a^2}{EI} M_2$ ist.



$$\varphi = f_2 = \alpha_{21} F_1$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12}$$

Geg.: a, EI, M_2 **(2 Punkte)**

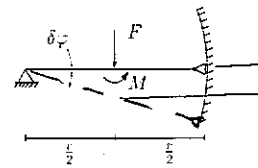
$$w = f_1 = \alpha_{12} M_2$$

$$w = \frac{\varphi}{F_1} M_2 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{EI} M_2$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

LKM

2. Gegeben ist das System



$\delta x = \delta\varphi \frac{r}{2}$

Geben Sie die virtuelle Arbeit δW_F der Kraft F und δW_M des Moments M (inkl. der richtigen Vorzeichen) für eine virtuelle Verdrehung $\delta\varphi$ an.

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_M, \quad \delta W_F = \delta\varphi \frac{r}{2} F$$ **(2 Punkte)**

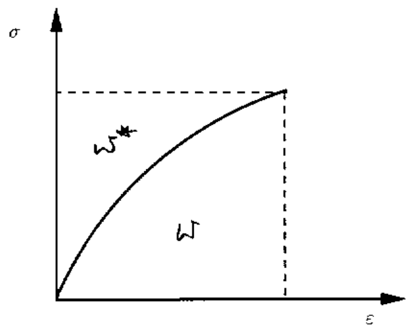
$$\delta W_M = -\delta\varphi M$$

3. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m s an:

Formänderungsenergie W	kg m²/s²
Lagrangefunktion L	kg m²/s²
Dehnsteifigkeit EA	kg m/s²

(1 Punkt)

4. Kennzeichnen Sie im gegebenen Spannungs Dehnungs Diagramm die Formänderungsenergiedichte w und die komplementäre Formänderungsenergiedichte w^*. Unter welcher Vorraussetzung sind beide gleich groß?

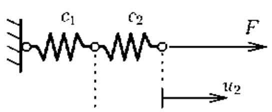


$w = w^*$

wenn linear-elastisch

(1 Punkt)

5. Geben Sie die Formänderungsenergie des Systems in Abhängigkeit der Verschiebungen u_i an. Bestimmen Sie die Verschiebung u_2 mit einem geeigneten Satz von CASTIGLIANO. Geg.: F, c_1, c_2.

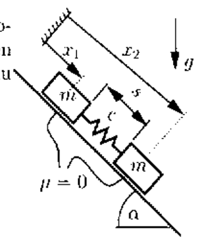


$F = c_1 u_1$, $F = c_2(u_2 - u_1)$, $W = \frac{1}{2} c_1 u_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (u_2 - u_1)^2$

(2 Punkte)

$W^* = \frac{1}{2} F^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)$, $\frac{\partial W^*}{\partial F} = u_2 = F \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}$

6. Geben Sie für das nebenstehend skizzierte System die kinetische und potentielle Energie unter Verwendung der in der Skizze angebenen Größen an. Die Länge der Feder im entspannten Zustand sei s_0. Das Nullniveau der potentiellen Energie liegt im Schwerpunkt der oberen Masse.



$E^{kin} = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)$

(2 Punkte)

$U = -mgx_1 \sin(\alpha) - mgx_2 \sin(\alpha) + \frac{1}{2} c (x_2 - x_1 - s_0)^2$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

TU berlin LKM

Kopplungsintegrale:

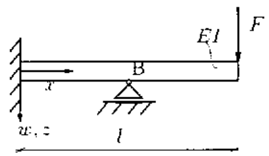
C	A	A	B	A B
a	$A \cdot a$	$\frac{1}{2} A \cdot a$	$\frac{1}{2} B \cdot a$	$\frac{1}{2}(A+B) \cdot a$
a	$\frac{1}{2} A \cdot a$	$\frac{1}{3} A \cdot a$	$\frac{1}{6} B \cdot a$	$\frac{1}{6}(2A+B) \cdot a$
a b	$\frac{1}{2} A \cdot (a+b)$	$\frac{1}{6} A \cdot (2a+b)$	$\frac{1}{6} B \cdot (a+2b)$	$\frac{1}{6}(2Aa+2Bb+Ab+Ba)$
a	$\frac{2}{3} A \cdot a$	$\frac{1}{3} A \cdot a$	$\frac{1}{3} B \cdot a$	$\frac{1}{3}(A+B) \cdot a$
a	$\frac{2}{3} A \cdot a$	$\frac{5}{12} A \cdot a$	$\frac{1}{4} B \cdot a$	$\frac{1}{12}(5A+3B) \cdot a$
a	$\frac{1}{3} A \cdot a$	$\frac{1}{4} A \cdot a$	$\frac{1}{12} B \cdot a$	$\frac{1}{12}(3A+B) \cdot a$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

WS 2010-2011 Energiemethoden der Mechanik, 1. Klausur - 2/2

1 (12 Punkte)

Ein fest eingespannter, schubstarren Balken (Biegesteifigkeit EI) ist an der Stelle B ($x_B = l/2$) zusätzlich gelagert und durch die äußere Kraft F belastet.



(a) Untersuchen Sie den Balken auf statische Bestimmtheit. (Begründung!)

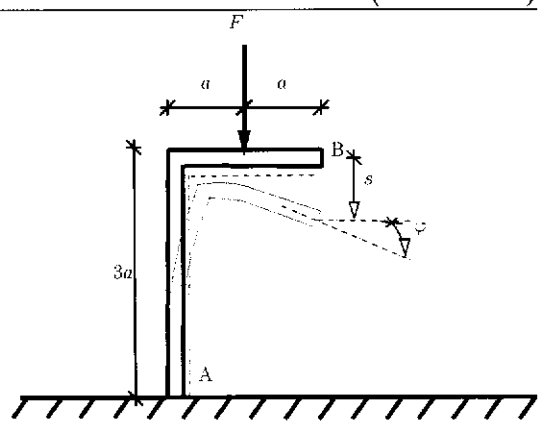
(b) Bestimmen Sie die Lagerkraft F_{B_z} mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte. Zerlegen Sie dazu das System in statisch-bestimmte Teilsysteme, lösen Sie jeweils die Teilsysteme durch eine Testkraft und bestimmen Sie an einer geeigneten Stelle durch Superposition die Verschiebung, die wegen der Lagerung rein anschaulich bestimmt werden kann.
Hinweis: Die Integration kann mithilfe der Integrationstabelle durchgeführt werden.

(c) Bestimmen Sie die Durchbiegung an der Stelle $x = l/4$ mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.
Hinweis: Falls die Kraft F_{B_z} in Teil b) nicht berechnet ist, kann $F_B = \frac{7}{2}F$ angenommen werden.

Geg.: E, I, l

2 (15 Punkte)

Der gezeigte Bernoulli-Balken (Biegesteifigkeit EI und Dehnsteifigkeit EA) ist durch die Kraft F belastet.



(a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen in der festen Einspannung.

(b) Berechnen Sie mit einem geeigneten Satz von CASTIGLIANO die Kraft F, um am rechten Rand des Balkens (Punkt B) eine Verschiebung der Weite s zu erzeugen.
Tip: Argumentieren Sie über Normalkraft- und Momentenflächen und berechnen Sie mit der Tabelle die Formänderungsenergie.

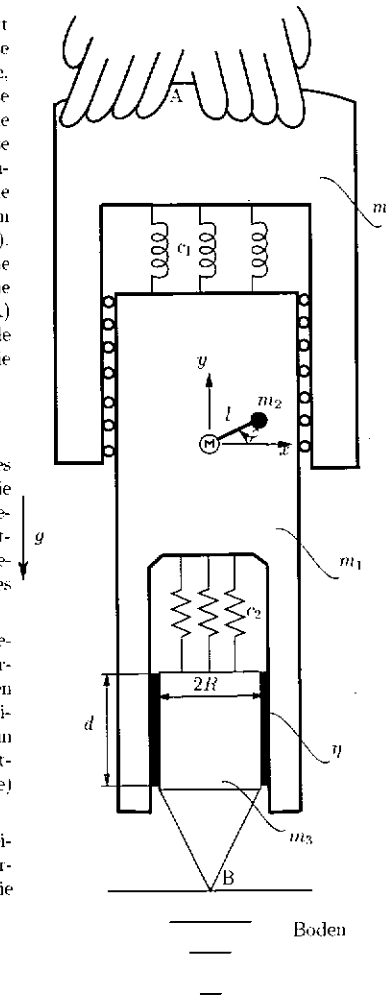
(c) Berechnen Sie mit dem Satz von CASTIGLIANO die Verdrehung φ des rechten Balkenendes in Abhängigkeit der unbekannten Kraft F.

Geg.: E, A, I, a, s.

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 (13 Punkte)

Ein zylinderförmiger Bohrhammer ist im Querschnitt skizziert. Im Schwerpunkt des Körpers mit der Masse m_1 befindet sich ein Motor, welcher eine gelenkige, mit starrer Stange (Länge l) gebundene Unwuchtmasse m_2 mit gleichbleibender Geschwindigkeit Ω in die exzentrische Bewegung bringt. Die Körper der Masse m_1 und m_4 sind mit Kugellager (reibungsfrei anzunehmen) gelagert. Der Körper der Masse m_3 stellt eine geführte Bewegung im Kanal (als Zylinder mit dem Radius R und der Mantelfläche ($2\pi Rd$) anzunehmen), der wegen der Oberflächenrauigkeit (η) durch eine (dissipative) Reibungskraft gedämpft wird. Nehmen Sie den Boden (Punkt B) sowie den Arbeiter (Punkt A) als nicht beweglich (wie eine Wand) an, stellen Sie alle Massen als starre Massen dar und berechnen Sie die Bewegungsgleichung(en) des Systems.



(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems mit der Formel $f = z - k$. Geben Sie die verwendeten kinematischen Beziehungen an. Bekennzeichnen Sie die (generalisierte(n)) Absolutkoordinate(n) q_i $i = 1 \dots f$ in Bezug auf das eingezeichnete Koordinatensystem im Schwerpunkt des Körpers der Masse m_1.

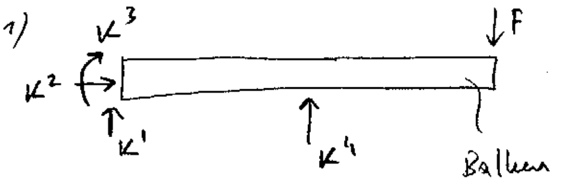
(b) Stellen Sie die nötigen Ortsvektoren und Geschwindigkeiten in Bezug auf die Absolutkoordinate(n) auf und bestimmen Sie mithilfe den Ortsvektoren und Geschwindigkeiten die kinetische und potentielle Energien. Schreiben Sie nun die Lagrangefunktion des Systems sowie die nichtkonservative(n) (dissipative(n)) Kraft (Kräfte) bzgl. der generalisierte(n) Koordinate(n) q_i auf.

(c) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung(en) für das System durch die Euler-Lagrange Gleichung und bringen Sie (jede) in die endgültige Form $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = d$.

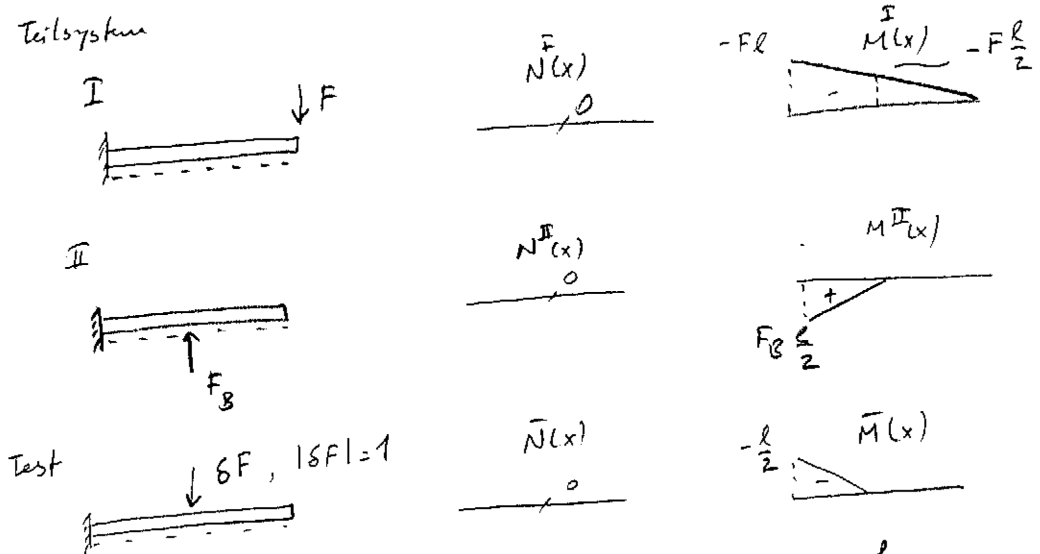
Geg.: $\Omega = \text{const.}, m_1, m_2, m_3, m_4, c_1, c_2, g, d, R, \eta$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

EM, 1. Klausur, Musterlösung

1) 

a) 4 Unbekannte, 3 Gleichungen } 1-fach statisch unbestimmt (1)

b) 

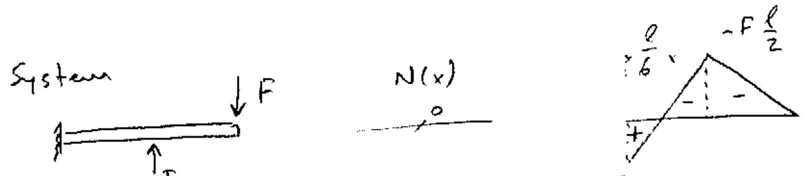
(1) (1) (1)

$$\delta\left(x=\frac{\ell}{2}\right) = \delta^{I} + \delta^{II} = \frac{1}{EI}\int_0^\ell M^{I}(x)\,\bar{M}(x)\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^\ell M^{II}(x)\,\bar{M}(x)\,dx$$ (1) (1)

$$= \frac{1}{EI}\,\frac{\ell}{2}\,\frac{1}{6}\left(2(-F\ell) + \left(-F\frac{\ell}{2}\right)\right)\left(-\frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{EI}\,\frac{\ell}{2}\,\frac{1}{3}\,F_B\frac{\ell}{2}\left(-\frac{\ell}{2}\right)$$ (1)

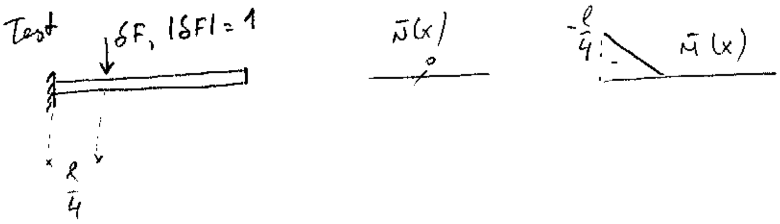
$$\delta\left(x=\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = \frac{5}{8\cdot 6}F\ell^3 - \frac{1}{8\cdot 3}F_B\ell^3$$

$$F_B = \frac{5}{2}F$$ (1)

c) 

(1)

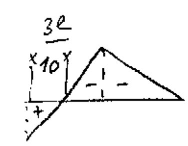
$-F\ell + F_B\frac{\ell}{2} = \frac{1}{4}F\ell$



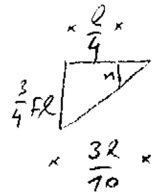
(1)

Annahme:

$F_B = \frac{7}{2}F$



$-F\ell + F_B\frac{\ell}{2} = \frac{3}{4}F\ell$



$$\frac{3/4\,F\ell}{3\ell/10} = \frac{h}{\ell/20}$$

$h = \frac{1}{8}F\ell$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

$$\delta\left(x=\frac{\ell}{4}\right) = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell/6} \quad \frac{1}{4}F\ell \quad \times \quad -\frac{\ell}{4} \quad -\frac{\ell}{12} \quad +$$

(1)

$$+\frac{1}{EI}\int_{\ell/6}^{\ell/4} \quad -F\frac{\ell}{8} \quad \times \quad -\frac{\ell}{12} \quad =$$

$$= \frac{1}{EI}\,\frac{\ell}{6}\,\frac{1}{6}\left(\frac{F\ell}{4}\right)\left(-2\frac{\ell}{4}-\frac{\ell}{12}\right) +$$

$$+\frac{1}{EI}\left(\frac{\ell}{4}-\frac{\ell}{6}\right)\frac{1}{6}\left(-F\frac{\ell}{8}\right)\left(-\frac{\ell}{12}\right) =$$

$$= -\frac{F\ell^3}{EI}\,\frac{7}{36\cdot4\cdot12} + \frac{F\ell^3}{EI}\,\frac{1}{12\cdot6\cdot8\cdot12} =$$

$$= -\frac{F\ell^3}{EI}\,\frac{27}{48\cdot144} = -\frac{F\ell^3}{EI}\,\frac{1}{16\cdot16}$$ (1)

Anmerkung:

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{4}} \quad \frac{3}{4}F\ell \quad \frac{1}{8}F\ell \quad \times \quad -\frac{\ell}{4} \quad =$$

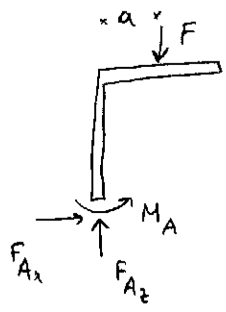
$$= \frac{1}{EI}\,\frac{\ell}{4}\,\frac{1}{6}\left(2\frac{3}{4}F\ell+\frac{1}{8}F\ell\right)\left(-\frac{\ell}{4}\right) =$$

$$= \frac{-F\ell^3}{EI}\,\frac{13}{8\cdot16\cdot6}$$

Σ (12)

2)

a)

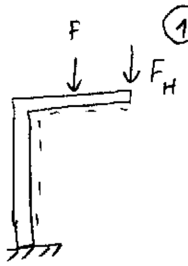


$\sum F_x = 0 \;:\; F_{A_x} = 0$

$\sum F_z = 0 \;:\; F_{A_z} = F$ (1)

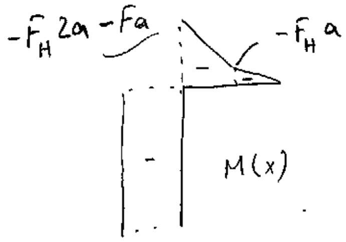
$\sum M_y^{(A)} = 0 \;:\; M_A = Fa$

b)

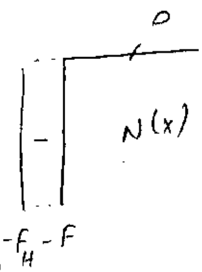


(1)

$$\left.\frac{\partial W_s^*}{\partial F_H}\right|_{F_H=0} = s \quad (1) \qquad , \quad W_s^* = \frac{1}{2EA}\int_0^{5a} N^2_{(x)}\,dx + \frac{1}{2EI}\int_0^{5a} M^2_{(x)}\,dx \quad (1)$$



(1)



(1)

(1)

$$W_s^* = \frac{1}{2EA}\,3a\,(-F_H-F)(-F_H-F) + \frac{1}{2EI}\,3a\,(-2F_Ha - Fa)(-2F_Ha-Fa) + \frac{1}{2EI}\,a\,\frac{1}{6}\Big(2(-F_H2a-Fa)^2 + 2(-F_Ha)^2 + (-F_H2a-Fa)(-F_Ha) + (-F_Ha)(-F_H2a-Fa)\Big) + \frac{1}{2EI}\,a\,\frac{1}{3}\,(F_Ha)^2$$

(1)

$$s = \left.\frac{\partial W_s^*}{\partial F_H}\right|_{F_H=0} = \frac{3a}{EA}(-F_H-F)(-1) + \frac{3a}{EI}(-2F_Ha-Fa)(-2a) + \frac{a}{12EI}\Big(4(-F_H2a-Fa)(-2a) + 4(-F_Ha)(-a) + 2\big((-2a)(-F_Ha) + (-F_H2a-Fa)(-a)\big)\Big) + \left.\frac{a}{6EI}\,2F_Ha\right|_{F_H=0} =$$

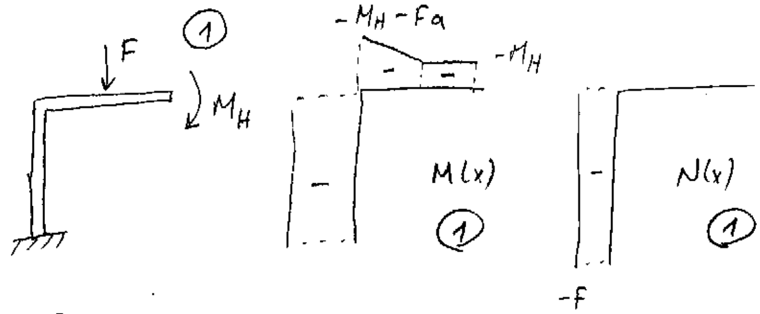
(1)

$$= \frac{F\,3a}{EA} + \frac{Fa^3\,6}{EI} + \frac{a}{12EI}\left(F\,8a^2 + F\,2a^2\right) = F\left(\frac{3a}{EA} + \frac{a^3}{EI}\,\frac{41}{6}\right)$$

$$F = \frac{s\,EAI}{3aI + \frac{41}{6}a^3A} \quad (1)$$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

c)



(1)

$$W_s^* = \frac{1}{2EA} 3a(-F)(-F) + \frac{1}{2EI} 3a(-M_H - Fa)(-M_H - Fa) + \frac{1}{2EI} a \frac{1}{6}\Big(2(-M_H - Fa)^2 + 2(-M_H)^2 + 2\big((-M_H - Fa)(-M_H)\big)\Big) + \frac{1}{2EI} a (-M_H)^2$$

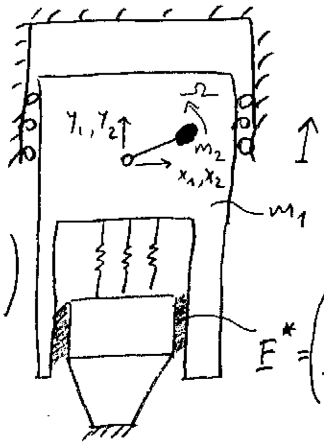
$$\varphi = \frac{\partial W_s^*}{\partial M_H}\Big|_{M_H=0} = \Big(\frac{3a}{EI}(-M_H - Fa)(-1) + \frac{a}{12EI}\Big(4(-M_H - Fa)(-1) + 4(-M_H)(-1) + 2\big((-1)(-M_H) + (-M_H - Fa)(-1)\big) + \frac{a}{EI}(-M_H)(-1)\Big)\Big|_{M_H=0} =$$

$$= \frac{F\,3a^2}{EI} + \frac{a}{12EI}(4Fa + 2Fa) = F\left(\frac{3a^2}{EI} + \frac{a^2}{2EI}\right) = F\frac{7a^2}{2EI} \quad (1)$$

Σ (15)

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3)



$\underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

a)

	z:	k:
m_1:	2	$\dot{x}_1 = 0$
$\uparrow q$ m_2:	2	$\dot{x}_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0$

$\left.\begin{matrix} z=4 \\ k=3 \end{matrix}\right\}$ $f = z - k = 1$ 1

$\varphi_2 = \Omega t$ gegeben.

$\underline{F}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -A\eta\dot{q} \end{pmatrix}, \varphi_1 = q$ 1

b) Ortsvektoren: $\underline{x}_{m_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$ 1 , $\underline{v}_{m_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{q} \end{pmatrix}$

Geschwindigkeiten

$$\underline{x}_{m_2} = \begin{pmatrix} \ell\cos(\Omega t) \\ q + \ell\sin(\Omega t) \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{m_2} = \begin{pmatrix} -\Omega\ell\sin(\Omega t) \\ \dot{q} + \Omega\ell\cos(\Omega t) \end{pmatrix} \quad 1$$

1

$$E^{kin} = \frac{1}{2} m_1 (\underline{v}_{m_1})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\underline{v}_{m_2})^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_2 \big(\Omega^2\ell^2\sin^2(\Omega t) +$$

$$+ \dot{q}^2 + 2\dot{q}\Omega\ell\cos(\Omega t) + \Omega^2\ell^2\cos^2(\Omega t)\big) = \dot{q}^2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) + \dot{q}\big(m_2\Omega\ell\cos(\Omega t)\big) +$$

1

$$\frac{1}{2} m_2 \Omega^2 \ell^2$$

1

$$U = -m_1 \underline{g}\cdot\underline{x}_{m_1} - m_2 \underline{g}\cdot\underline{x}_{m_2} + 3\,\frac{1}{2} c_1 q^2 + 3\,\frac{1}{2} c_2 q^2 =$$

$$= +m_1 g q + m_2 g\big(q + \ell\sin(\Omega t)\big) + \frac{3}{2} q^2 (c_1 + c_2)$$

1

$$L = E^{kin} - U = \dot{q}^2\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) + \dot{q}\big(m_2\Omega\ell\cos(\Omega t)\big) - q^2\frac{3}{2}(c_1 + c_2) - q\,(+m_1 g + m_2 g) +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \Omega^2\ell^2 - m_2 g \ell \sin(\Omega t)$$

1

$$\underline{F}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta\dot{q}\,2\pi R d \end{pmatrix}, \quad Q^* = F_i^* \frac{\partial (x_{m_1})_i}{\partial q} + F_i^* \frac{\partial (x_{m_2})_i}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta\dot{q}\,2\pi R d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

1

$$= -\eta\dot{q}\,2\pi R d$$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

c) $\frac{\partial L}{\partial q} = -q\,3(c_1+c_2) - m_1 g - m_2 g$ 1

$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \dot q\,(m_1+m_2) + m_2\,\Omega l \cos(\Omega t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^*$$

$$\ddot q\,(m_1+m_2) + m_2\,\dot\Omega l \cos(\Omega t) - m_2\,\Omega^2 l \sin(\Omega t) + q\,3(c_1+c_2) + g(m_1+m_2) =$$

$$= -\eta\,\dot q\,2\pi R d$$ 1

$\Omega = \text{const.} \Rightarrow \dot\Omega = 0$

Bewegungsdifferentialgleichung für q: 1

$$\ddot q\,(m_1+m_2) + \dot q\,(\eta\,2\pi R d) + q\,3(c_1+c_2) = m_2\,\Omega^2 l \sin(\Omega t) - g(m_1+m_2)$$

Σ 13