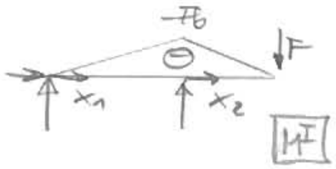
Aufg. 1

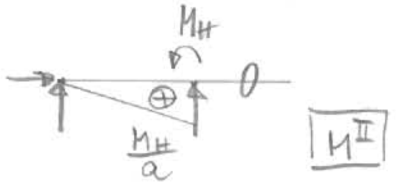


$$M^I(x_1) = -\frac{Fb}{a} x_1$$
$$M^I(x_2) = -Fb + Fx_2 = F(x_2-b)$$

$$w_c = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EJ}\int_0^a -\frac{Fb}{a}x_1\left(-\frac{b}{a}x_1\right)dx_1 + \frac{1}{EJ}\int_0^b F(x_2-b)^2\,dx_2$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{Fb^2}{a^2}\frac{x_1^3}{3}\right]_0^a + \frac{1}{EJ}\left[F\left(\frac{x_2^3}{3} - 2b\frac{x_2^2}{2} + b^2x_2\right)\right]_0^b$$

$$= \frac{F}{EJ}\left(\frac{b^2a}{3} + \frac{b^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{Fb^2}{3EJ}(a+b)}}$$



$$M^{II}(x_1) = \frac{M_H}{a} x_1$$
$$M^{II}(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow M_{ges}(x_1) = \left(-\frac{Fb}{a} + \frac{M_H}{a}\right)x_1$$

$$\varphi_B = \frac{\partial W_{ges}}{\partial M_H}\bigg|_{M_H=0} = \frac{1}{EJ}\int_0^a \left(-\frac{Fb}{a} + \frac{M_H}{a}\right)x_1 \cdot \frac{x_1}{a}\,dx_1\bigg|_{M_H=0}$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\left(-\frac{Fb}{a^2} + \frac{M_H}{a^2}\right)\frac{x_1^3}{3}\right]_0^a\bigg|_{M_H=0}$$

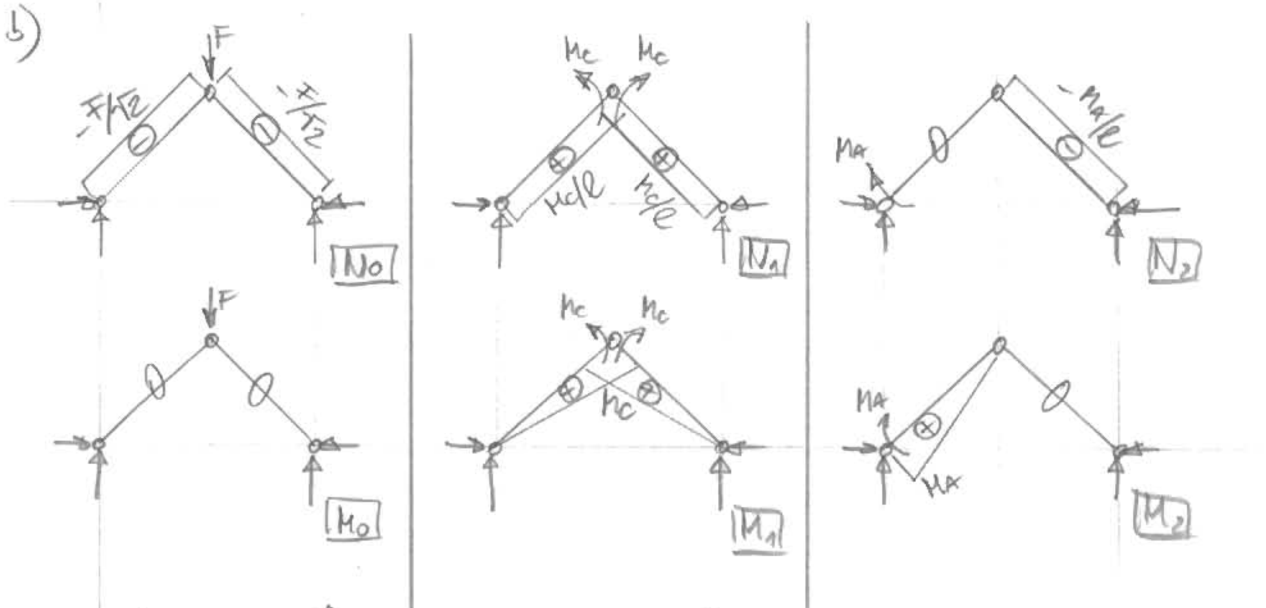
$$= \underline{\underline{-\frac{Fba}{3EJ}}}$$

Aufg. 2

a) $n = a + z - 3s = (3+2) + 0 - 3 \cdot 1 = 2$

System ist 2fach statisch unbestimmt

b)



„Situation 0" „Situation 1" „Situation 2"

c) $\varphi_C = \delta_C^0 + \delta_C^1 + \delta_C^2 \overset{!}{=} 0$

$\varphi_A = \delta_A^0 + \delta_A^1 + \delta_A^2 \overset{!}{=} 0$

d) $\delta_C^0 = \frac{1}{EA} \cdot 1 \cdot \left[-\frac{F}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{\bar{1}}{\ell}\right] \ell \cdot 2 = -\frac{2F}{\sqrt{2}EA} = -\frac{F\ell^2}{6\sqrt{2}EJ}$

$\delta_C^1 = \frac{1}{EA} \cdot 1 \cdot \left[\frac{M_C}{\ell}\right]\left[\frac{\bar{1}}{\ell}\right] \cdot \ell \cdot 2 + \frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{1}{3} \cdot [M_C][\bar{1}]\ell + \frac{1}{EJ_2} \cdot \frac{1}{3}[M_C][\bar{1}]\ell$

$= \frac{2M_C}{EA\ell} + \frac{M_C\ell}{3EJ_1} + \frac{M_C\ell}{3EJ_2} = \left(\frac{2}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\frac{M_C\ell}{EJ} = \frac{2}{3}\frac{M_C\ell}{EJ}$

$\delta_C^2 = \frac{1}{EA} \cdot 1 \cdot \left[-\frac{M_A}{\ell}\right]\left[\frac{\bar{1}}{\ell}\right]\ell + \frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{1}{6}[M_A][\bar{1}] \cdot \ell = -\frac{M_A}{EA\ell} + \frac{M_A\ell}{6EJ_1}$

$= \frac{M_A\ell}{12EJ}$

$\delta_A^0 = \frac{1}{EA} \cdot 1 \cdot \left[-\frac{F}{\sqrt{2}}\right]\left[-\frac{\bar{1}}{\ell}\right]\ell = \frac{F}{\sqrt{2}EA} = \frac{F\ell^2}{12\sqrt{2}EJ}$

$\delta_A^1 = \frac{M_C\ell}{12EJ}$ → Maxwell-Betti

$\delta_A^2 = \frac{1}{EA} \cdot 1 \cdot \left[\frac{M_A}{\ell}\right]\left[-\frac{\bar{1}}{\ell}\right]\ell + \frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{1}{3}[M_A][\bar{1}]\ell = \frac{M_A}{EA\ell} + \frac{M_A\ell}{3EJ}$

$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right)\frac{M_A\ell}{EJ} = \frac{5}{12}\frac{M_A\ell}{EJ}$

noch Aufg. 2

e)
$$\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6}\frac{Fl}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12}\frac{Fl}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$-\frac{39}{12} M_A = \frac{10}{12}\frac{Fl}{\sqrt{2}}$$

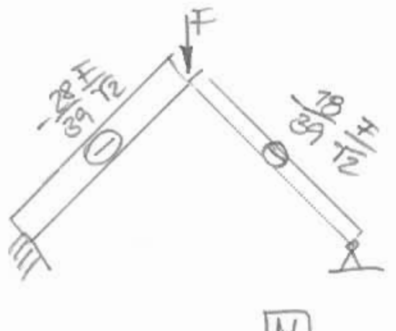
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{M_A = -\frac{10}{39}\frac{Fl}{\sqrt{2}}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3} M_C + \frac{1}{12}\left(-\frac{10}{39}\frac{Fl}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{6}\frac{Fl}{\sqrt{2}}$$

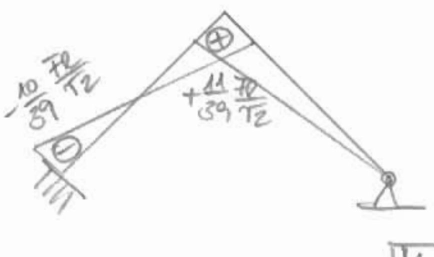
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3} M_C = \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{234}\right)\frac{Fl}{\sqrt{2}} = \frac{44}{234}\frac{Fl}{\sqrt{2}} = \frac{22}{117}\frac{Fl}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{M_C = \frac{11}{39}\frac{Fl}{\sqrt{2}}}}$$

f)



N



M

g) $$w_C = \frac{1}{EA}\left\{1 \cdot \left[-\frac{28}{39}\frac{F}{\sqrt{2}}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cdot l + 1 \cdot \left[-\frac{18}{39}\frac{F}{\sqrt{2}}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] l\right. = \frac{23}{39}\frac{Fl}{EA}$$

$$\left(= \frac{23}{468}\frac{Fl^3}{EJ}\right)$$

Aufg. 3

a) $\underset{\sim}{x} = r\cos\varphi\, \underset{\sim}{e}_1 + r\sin\varphi\, \underset{\sim}{e}_2$

b) $E_{kin} = \frac{1}{2} m \underset{\sim}{v}^2$

mit $\underset{\sim}{v} = (\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_1 + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_2$

$\Rightarrow \underset{\sim}{v}^2 = \dot{r}^2\cos^2\varphi - 2r\dot{r}\cancel{\cos\varphi\sin\varphi}\dot{\varphi} + r^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2$
$+ \dot{r}^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}r\cancel{\cos\varphi\sin\varphi}\dot{\varphi}$

$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

$U = mgh + \frac{1}{2} c \Delta x^2 \qquad$ mit $h = -x_1 = -r\cos\varphi$
$\Delta x = r - r_0$

$= -mgr\cos\varphi + \frac{1}{2} c (r - r_0)^2$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2} c (r - r_0)^2$

c) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^*$

d) $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$

$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - c(r - r_0)$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgr\sin\varphi$

e) $Q_j^* = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{F}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{x}_i}{\partial q_j} + \underset{\sim}{M}_i \cdot \frac{\partial q_i}{\partial q_j}$

hier $\underset{\sim}{F}_W \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial r} = \left(-k(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \frac{(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_1 + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_2}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}} \right.$
$\left. \cdot (\cos\varphi\, \underset{\sim}{e}_1 + \sin\varphi\, \underset{\sim}{e}_2) \right)$

$= -k\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\ \dot{r}\cos^2\varphi - r\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}\dot{\varphi} + \dot{r}\sin^2\varphi + r\cancel{\cos\varphi}\dot{\varphi}\cancel{\sin\varphi}$

$= -k\dot{r}\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$

noch Aufg. 3

$$\underset{\sim}{F}_W \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \varphi} = \left(-k\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}\,(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot\varphi)\,\underset{\sim}{e}_1 + (\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot\varphi)\,\underset{\sim}{e}_2\right)$$

$$\cdot\left(-r\sin\varphi\,\underset{\sim}{e}_1 + r\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_2\right)$$

$$= -k\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}\,\Big(\cancel{-r\dot r\sin\varphi\cos\varphi} + r^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi + \cancel{r\dot r\sin\varphi\cos\varphi}$$
$$+ r^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi\Big)$$

$$= -k r^2\dot\varphi\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}$$

$$\underset{\sim}{M} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{\varphi}}{\partial r} = M(t)\,\underset{\sim}{e}_z \cdot 0 = 0$$

$$\underset{\sim}{M} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{\varphi}}{\partial \varphi} = M(t)\,\underset{\sim}{e}_z \cdot 1\,\underset{\sim}{e}_z = M(t)$$

$\Rightarrow$ Bewegungs-DGLen:

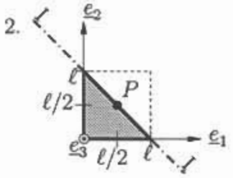
$$m\ddot r - m r\dot\varphi^2 - mg\cos\varphi + c(r - r_0) = -k\dot r\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}$$

$$2m r\dot r\dot\varphi + m r^2\ddot\varphi + mgr\sin\varphi = -k r^2\dot\varphi\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2} + M(t)$$

Theorieaufgaben

1. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{11}.

   Geg.: λ, μ, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\qquad \sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})+2\mu\varepsilon_{11}$ **(1 Punkt)**

2. 

   Gegeben ist der Spannungszustand eines dreidimensionalen Körpers (Würfel). Berechnen Sie den Spannungsvektor für den in der Skizze dargestellten Punkt P für den Schnitt I-I.

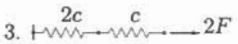
   Geg.: ℓ, $P = (\ell/2, \ell/2, 0)$, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}}x_1x_2 & 5\sqrt{2}\ell^2 & 0 \\ 5\sqrt{2}\ell^2 & 0 & 2\sqrt{3}x_3^2 \\ 0 & 2\sqrt{3}x_3^2 & 0 \end{bmatrix}$

   (1 Punkt)

   $t_i = n_j\sigma_{ij} \Rightarrow \underset{\sim}{t} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}x_1x_2 + 5\ell^2 \\ 5\ell^2 \\ 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x_3^2 \end{Bmatrix}$

   mit $\underset{\sim}{n} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$

   $\Rightarrow \underset{\sim}{t}_P = \begin{Bmatrix} \frac{3}{8}\ell^2 + 5\ell^2 \\ 5\ell^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{43}{8}\ell^2 \\ 5\ell^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

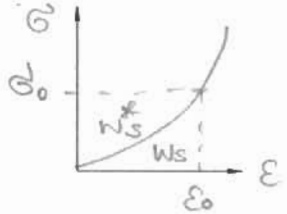
3. 

   Berechnen Sie die Formänderungsenergie des Systems infolge der gegebenen Belastung.

   Geg.: $2F$, c

   $W = \frac{1}{2}\frac{(2F)^2}{2c} + \frac{1}{2}\frac{(2F)^2}{c} = 3F^2/c$ **(1 Punkt)**

4. Wie ist die Formänderungsenergiedichte w_s und die komplementäre Formänderungsenergiedichte w_s^* definiert? Skizzieren Sie diese Größen in einem Graphen für ein nicht lineares Materialverhalten. Bezeichnen Sie in dem Graphen auch Abszisse und Ordinate.

   $w_s = \int_{\tilde{\varepsilon}=0}^{\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_0} \tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})\, d\tilde{\varepsilon}$

   $w_s^* = \int_{\tilde{\sigma}=0}^{\tilde{\sigma}=\sigma_0} \varepsilon(\tilde{\sigma})\, d\tilde{\sigma}$

   (2 Punkte)

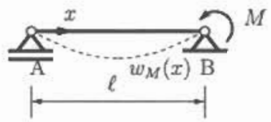
5. Ergänzen Sie die Spiegelstriche durch kurze Stichworte.

   Virtuelle Verrückungen erfüllen folgende Regeln:

   - klein
   - kinematisch möglich/verträglich
   - beliebig

   (1 Punkt)

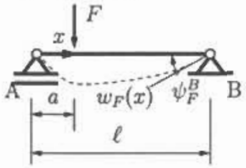
6. Problem:

   Wie ist die Einflußzahl α^{ik}, ausgedrückt durch Kraftgrößen K und Verschiebungsgrößen f, definiert?

   $\alpha^{ik} = \frac{f^i}{K^k}$

   Tabellenwerk:

   Gegeben ist das Problem eines Einfeldträgers unter Momentenbeanspruchung. Gesucht ist die maximale Durchbiegung in Feldmitte $x = \ell/2$.

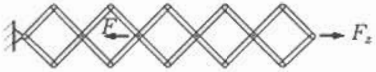
   Ein zur Hilfe genommenes Tabellenwerk beinhaltet zwar nicht das gesuchte System, jedoch ein ähnliches, nämlich das eines Einfeldträgers, der durch eine Einzelkraft an der Stelle $x = a$ belastet wird (s. Skizze). Der Stabdrehwinkel am rechten Lager für dieses System beträgt ψ_F^B (beachte Drehsinn!). Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Maxwell-Betti $W^{12} = W^{21}$ die gesuchte Verschiebung für das gegebene Problem des Einfeldträgers unter Momentenbeanspruchung.

   Geg.: M, ℓ, $\psi_F^B = -\frac{F\ell^2}{6EI}\left[\left(\frac{a}{\ell}\right) - \left(\frac{a}{\ell}\right)^3\right]$

   (3 Punkte)

   $F w_M(x=\frac{\ell}{2}) = M\varphi$ mit $\varphi = -\psi^B_{F,x=\frac{\ell}{2}}$

   $\Rightarrow w = -\frac{M\psi_F^B}{F} = \frac{M\ell^2}{6EI}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right] = \frac{3M\ell^2}{48EI}$

7. 

   Mit welcher Kraft muß an der Nürnberger Schere gezogen werden, damit das System unter der gegebenen Belastung F im Gleichgewicht ist?

   Geg.: F

   $-F\cdot\frac{2}{5}\delta w + F_z\,\delta w = 0$

   $F_z = \frac{2}{5}F$

   (1 Punkt)