Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

# WS 2010-2011 Energiemethoden der Mechanik, Nachklausur - 1/2

**Bitte deutlich in <u>DRUCKSCHRIFT</u> schreiben!**

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

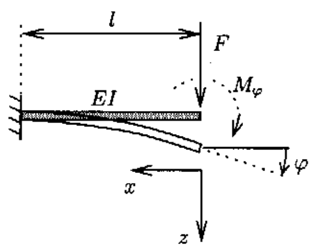
| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| $\sum$ | |
| T | |

**Bitte ankreuzen!**

○ Studienbegleitende Prüfung ○ Übungsscheinklausur

## Theorieaufgaben

1. Ein Bernoulli-Balken ist einseitig eingespannt und wird nur durch eine Kraft $F$ verformt. Bestimmen Sie den Verdrehwinkel $\varphi$ mit dem Satz von Castigliano, indem Sie ein Hilfsmoment $M_\varphi$ anbringen.




$M(x) = \boxed{-Fx - M_\varphi}$

$W^* = \boxed{\frac{1}{2EI}\left(F^2 \frac{\ell^3}{3} + M_\varphi^2 \ell\right.} \left. + 2F\frac{\ell^2}{2} M_\varphi\right)$

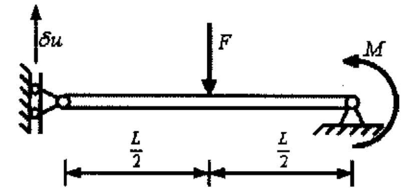
$\frac{\partial W^*}{\partial M_\varphi}\Big|_{M_\varphi=0} = \boxed{\frac{1}{2EI}\left(2F\frac{\ell^2}{2}\right)}$

$\varphi = \boxed{\frac{F\ell^2}{2EI}}$

Geg.: $EI$, $l$, $F$. **(2 Punkte)**

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2. Gegeben ist das System




Geben Sie die virtuelle Arbeit $\delta W_F$ der Kraft $F$ und $\delta W_M$ des Moments $M$ (inkl. der richtigen Vorzeichen) für eine virtuelle Verschiebung $\delta u$ an.

$\delta W_F = -\frac{\delta u}{2} F \quad , \quad \delta W_M = -\frac{\delta u}{L} M$ **(2 Punkte)**

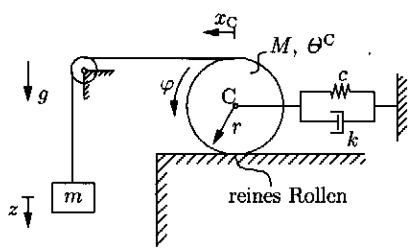
3. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **<u>ausschließlich</u>** in den Einheiten 1, kg, m , s , N, J und K an:

| | |
|---|---|
| Formänderungsenergiedichte $W^s$ | $J/m^3$ , $N/m^2$ , $kg/ms^2$ |
| spezifische Strahlungsdichte $r$ | $J/kg\,s$ , $Nm/kg\,s$ , $m^2/s^3$ |

**(1 Punkt)**

4. Geben Sie die kinetische Energie $E_{\text{kin}}$ des skizzierten Systems in Abhängigkeit der gegebenen Koordinaten $(x_C, z, \varphi)$ an!

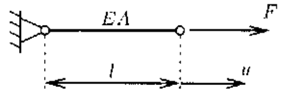
Gegeben: $M$, $\Theta^C$, $m$, $g$, $r$, $c$, $k$




$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \Theta^C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2$ **(1 Punkt)**

**Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5. Ein Dehnstab ist einseitig eingespannt und wird durch eine Kraft $F$ verformt. Bestimmen Sie die Verschiebung $u$ mit dem Satz von Castigliano.




$$W^*(F) = \boxed{\frac{F^2 l}{2EA}}$$

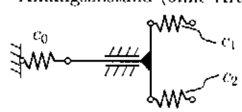
$$u = \frac{\partial W^*}{\partial F} = \boxed{\frac{F l}{EA}}$$

Geg.: $EA$, $l$, $F$. **(2 Punkte)**

6. An einem aus drei Federn bestehenden System wird zuerst $F_1$ aufgebracht und danach <u>zusätzlich</u> $F_2$. Wie groß ist die im System gespeicherte Formänderungsenergie $W$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen $c_0, c_1, c_2, F_1$ und $F_2$?

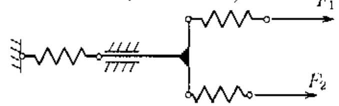
- ○ $W = \frac{1}{2}\frac{F_1}{c_1+c_0} + \frac{1}{2}\frac{F_2}{c_2+c_0}$
- ☒ $W = \frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{c_1} + \frac{F_1}{c_0}\right)F_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{F_2}{c_2} + \frac{F_2}{c_0}\right)F_2$
- ○ $W = \frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{c_1} + \frac{F_1}{c_0}\right)F_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{F_2}{c_2} + \frac{F_2}{c_0}\right)F_1$
- ○ $W = \frac{F_1}{c_1+c_0} + \frac{F_2}{c_2+c_0} + \frac{1}{2}\frac{F_2}{c_0}F_1$

Anfangszustand (ohne Kräfte)



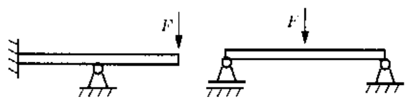

$$\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{c_1}\right)^2 c_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{c_0}\right)^2 c_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{F_2}{c_2}\right)^2 c_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{F_2}{c_0}\right)^2 c_0$$

Endzustand (mit Kräften)




**(1 Punkt)**

7. Kreuzen Sie bitte alle richtigen (und nur diese) Aussagen an!




Das System ist: **(1 Punkt)**

| | | |
|---|---|---|
| statisch bestimmt | ☐ | ☑ |
| statisch unbestimmt | ☑ | ☐ |

**Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Kopplungsintegrale:

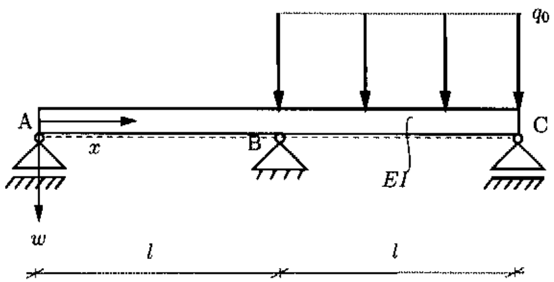
| $C$ | $A$ | $A$ | $B$ | $A$ $B$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $A \cdot a$ | $\frac{1}{2} A \cdot a$ | $\frac{1}{2} B \cdot a$ | $\frac{1}{2}(A+B) \cdot a$ |
| $a$ | $\frac{1}{2} A \cdot a$ | $\frac{1}{3} A \cdot a$ | $\frac{1}{6} B \cdot a$ | $\frac{1}{6}(2A+B) \cdot a$ |
| $a$ $b$ | $\frac{1}{2} A \cdot (a+b)$ | $\frac{1}{6} A \cdot (2a+b)$ | $\frac{1}{6} B \cdot (a+2b)$ | $\frac{1}{6}(2Aa+2Bb+Ab+Ba)$ |
| $a$ | $\frac{2}{3} A \cdot a$ | $\frac{1}{3} A \cdot a$ | $\frac{1}{3} B \cdot a$ | $\frac{1}{3}(A+B) \cdot a$ |
| $a$ | $\frac{2}{3} A \cdot a$ | $\frac{5}{12} A \cdot a$ | $\frac{1}{4} B \cdot a$ | $\frac{1}{12}(5A+3B) \cdot a$ |
| $a$ | $\frac{1}{3} A \cdot a$ | $\frac{1}{4} A \cdot a$ | $\frac{1}{12} B \cdot a$ | $\frac{1}{12}(3A+B) \cdot a$ |

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

# WS 2010-2011 Energiemethoden der Mechanik, Nachklausur - 2/2

## 1 (13 Punkte)

Ein BERNOULLI Balken (Biegesteifigkeit $EI$) ist durch ein Fest- und zwei Loslager gelagert und mit einer konstanten Streckenlast $q_0$ (s. Skizze) belastet.




(a) Untersuchen Sie den Balken auf statische Bestimmtheit. (Begründung!)

(b) Bestimmen Sie die Lagerkraft $F_{A_z}$ mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte. Zerlegen Sie dazu das System in statisch bestimmte Teilsysteme und lösen Sie das Gesamtproblem durch Superposition.

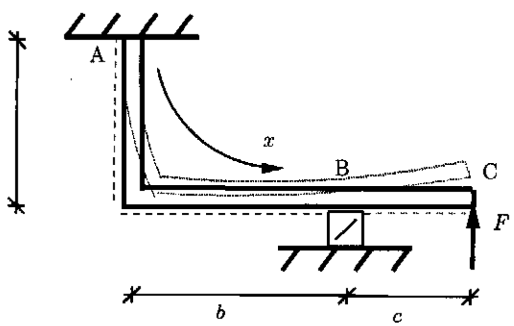
Geg.: $E$,$I$, $q_0$, $l$.

## 2 (12 Punkte)

Der gezeigte BERNOULLI Balken (Biegesteifigkeit $EI$ und Dehnsteifigkeit $EA$) ist durch die Kraft $F$ belastet. Im unbelasteten Zustand soll in Punkt $B$ keine Reaktionskraft zwischen Balken und Klotz wirken.

(a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen im Punkt $A$.

(b) Berechnen Sie mit dem Satz von CASTIGLIANO die Kraft $F$, um an der Position $B$ einen Spalt der Weite $d$ zu erzeugen.
Tip: Nutzen Sie eine Hilfskraft und argumentieren Sie über Normalkraft- und Momentenflächen und berechnen die Formänderungsenergie. Nutzen Sie die Tabelle für die Integrationen.

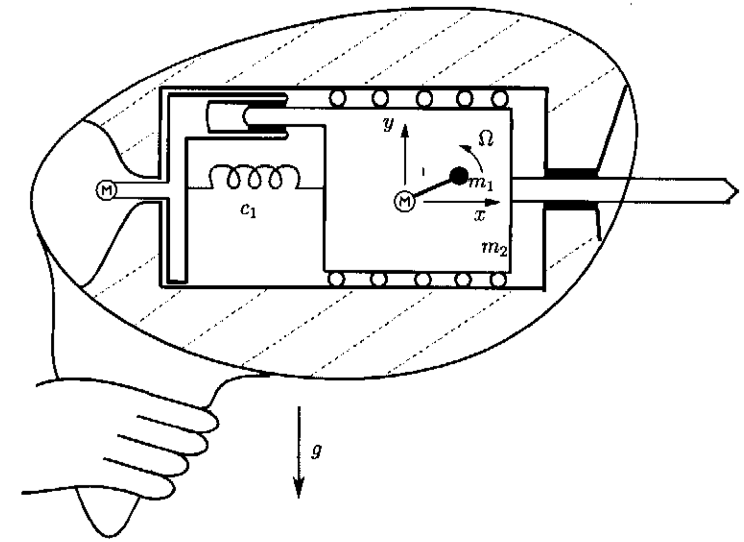



Geg.: $a$, $b$, $c$, $d$, $EA$, $EI$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

## 3 (15 Punkte)

Eine Schlagbohrmaschine ist im Querschnitt skizziert. Für die Hammerfunktion ist im Schwerpunkt des Geräts eine Unwuchtmasse $m_1$ exzentrisch mit konstanter Geschwindigkeit $\Omega$ um die $z$-Achse rotiert. Der gesamte Innenteil dreht sich um die $x$-Achse. Da sich der Innenteil im Schmieröl bewegt, herrscht Reibung entgegen der Geschwindigkeit mit einer Konstante $\eta$, welche aus der Geometrie und Ölviskosität berechnet wurde. Berechnen Sie die Differentialgleichung der translatorischen Bewegung des Innenteils in Bezug auf das dargestellte, raumfeste Koordinatensystem mit dem Ursprung in der statischen Ruhelage (am Schwerpunkt vor dem Einschalten).




(a) Wählen Sie die Absolutkoordinate in Bezug auf das eingezeichnete Koordinatensystem im Schwerpunkt des Körpers der Masse $m_2$ während der statischen Ruhelage. Skizzieren Sie den (translatorisch) beweglichen Teil und kennzeichnen Sie darauf die Absolutkoordinate.

(b) Stellen Sie die nötigen Ortsvektoren und Geschwindigkeiten in Bezug auf die Absolutkoordinate auf und bestimmen Sie mithilfe von den Ortsvektoren und Geschwindigkeiten die kinetische und potentielle Energien. Schreiben Sie nun die Lagrangefunktion des Systems sowie die nichtkonservative (dissipative) Kraft bzgl. generalisierter Koordinate $q$ auf.

(c) Bestimmen Sie die Differentialgleichung der Translation für das System durch die Euler-Lagrange Gleichung und bringen Sie in die endgültige Form $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = d$.

(d) Welche zusätliche Terme würden in der Differentialgleichung erscheinen, wenn die Bewegung der Masse $m_1$ mit einer zeitlich veränderlichen Funktion $\Omega(t)$ sein sollte, da der Motor ein konstantes Drehmoment hat?

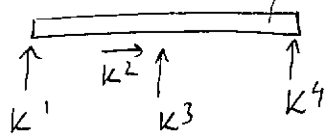
Geg.: $\Omega = \text{const.}, m_1, m_2, c_1, g, \eta$

**Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

**. Übungsblatt** EM 2, Musterlösung WS 2010/2011

1)

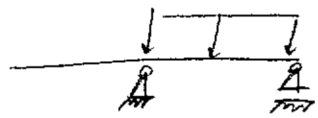
a)



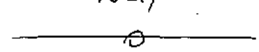

1 Balken ≙ 3 Gleichungen
4 Unbekannten

} 1fach statisch unbestimmt (1)

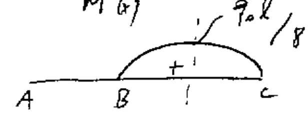
b) I:



$\overset{I}{N}(x)$

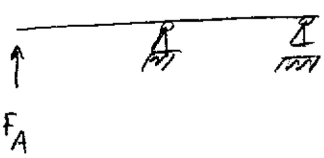


$M^I(x)$ (1)

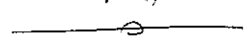



(1)

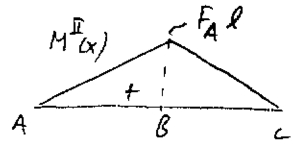
II:




$\overset{II}{N}(x)$

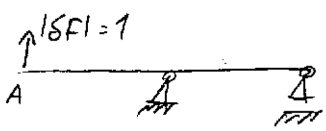


$M^{II}(x)$ (1)

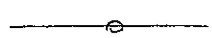



(1)

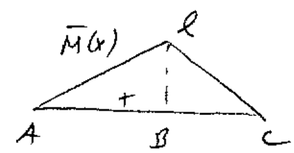
Test: (Richtung ist egal)




$\bar{N}(x)$



$\bar{M}(x)$




(1)

$$\delta_A = \delta_A^{I} + \delta_A^{II} \quad (1)$$

$$\delta_A^{I} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2EI} \int_{x=0}^{x=2l} 2\, M^{I}(x)\, \bar{M}(x)\, dx = \frac{1}{EI}\, l\, \frac{1}{3}\, \frac{q_0 l^2}{8}\, l = \frac{q_0 l^4}{EI\, 24} \quad (1)$$

$$\delta_A^{II} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2EI} \int_{x=0}^{x=2l} 2\, M^{II}(x)\, \bar{M}(x)\, dx = \frac{1}{EI}\left(l\, \frac{1}{3}\, F_A l\, l\right) 2 = \frac{2 l^3 F_A}{EI\, 3} \quad (1)$$

$$\delta_A \overset{(1)}{=} 0 = \frac{q_0 l^4}{EI\, 24} + \frac{2 l^3 F_A}{EI\, 3} \Rightarrow F_A = -\frac{q_0 l}{16} \quad (1)$$

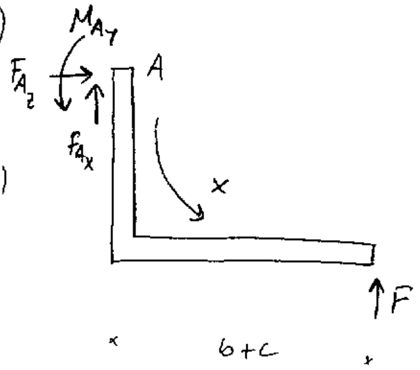
$\Sigma\ 13$

**Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin



2)

a)

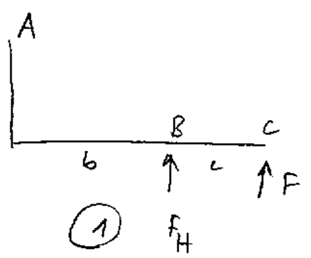



$\Sigma F_x = 0: \; F_{A_x} = -F$

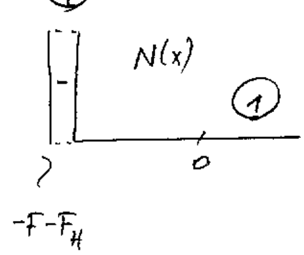
$\Sigma F_z = 0: \; F_{A_z} = 0$ 1

$\Sigma M^{(A)} = 0: \; M_A = -F(b+c)$

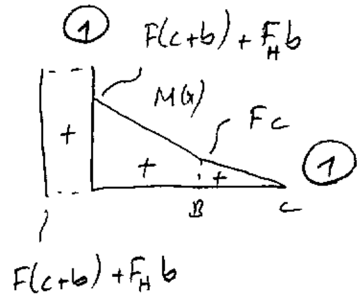
b)




1




1 1




1 1

1

$$W^* = \frac{1}{2EA}\int N^2_{(x)}\,dx + \frac{1}{2EI}\int M^2_{(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2EA} a\left(F+F_H\right)^2 + \frac{1}{2EI} a\left(F(c+b)+F_H b\right)^2 + \frac{1}{2EI} b \frac{1}{6}\Big[2\left(F(c+b)+F_H b\right)^2 +$$

2

$$+ 2\left(Fc\right)^2 + 2\left(F(c+b)+F_H b\right)\left(Fc\right)\Big] + \frac{1}{2EI} c \frac{1}{3} (Fc)^2$$

1

$$d = \left.\frac{\partial W^*}{\partial F_H}\right|_{F_H=0} = \left(\frac{a(F+F_H)}{EA} + \frac{a b\left(F(c+b)+F_H b\right)}{EI} + \frac{b\, b\, 2\left(F(c+b)+F_H b\right)}{6EI} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 b F c\, b}{2EI\, 6}\right)\Bigg|_{F_H=0}$$

1

$$= \frac{aF}{EA} + \frac{1}{EI}\left(ab(c+b) + \frac{1}{3}b^2(c+b) + \frac{1}{6}b^2 c\right)F$$

$$F = \frac{d\,EAI}{aI + Aabc + Aab^2 + \frac{1}{3}Ab^2c + \frac{1}{3}Ab^3 + \frac{1}{6}Ab^2c}$$ 1

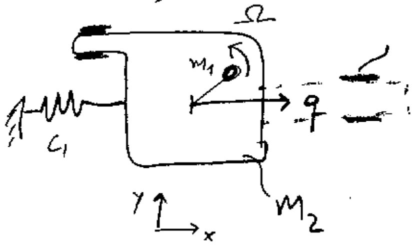
$\Sigma$ 12

**Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

**. Übungsblatt** EM2, Musterlösung WS 2010/2011

3)

a) 1




$\underline{F}^* = \begin{pmatrix} -\dot{q}\eta \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

b) $\underline{x}_{m_1} = \begin{pmatrix} q + l\cos(\Omega t) \\ l\sin(\Omega t) \end{pmatrix}$ 1, $\quad \underline{v}_{m_1} = \begin{pmatrix} \dot{q} - \Omega l \sin(\Omega t) \\ \Omega l \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$ 1

$\underline{x}_{m_2} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ 1, $\quad \underline{v}_{m_2} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

$$E^{kin} = \frac{1}{2} m_1 (\underline{v}_{m_1})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\underline{v}_{m_2})^2 = \frac{m_1}{2}\left( (\dot{q} - \Omega l \sin(\Omega t))^2 + \Omega^2 l^2 \cos^2(\Omega t) \right) +$$ 1

$$+ \frac{m_2}{2}\dot{q}^2 = \dot{q}^2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) + \dot{q}\left(-m_1 \Omega l \sin(\Omega t)\right) + \frac{m_1}{2}\Omega^2 l^2 \underbrace{\left(\sin^2() + \cos^2()\right)}_{=1}$$ 1

$$U = -m_1 \underline{g}\cdot\underline{x}_{m_1} - m_2 \underline{g}\cdot\underline{x}_{m_2} + \frac{1}{2}c_1 q^2 = m_1 g l \sin(\Omega t) + \frac{1}{2} c_1 q^2$$ 1

$$L = E^{kin} - U$$ 1, $$Q^* = \underline{F}^* \cdot \frac{\partial \underline{x}_{m_2}}{\partial q} = \begin{pmatrix} -\dot{q}\eta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{q}\eta$$ 1

c) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}(m_1 + m_2) - m_1 \Omega l \sin(\Omega t)$ 1, $\quad \frac{\partial L}{\partial q} = -c_1 q$ 1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^* \Rightarrow \ddot{q}(m_1 + m_2) + \dot{q}\eta + q c_1 = +m_1 \Omega^2 l \cos(\Omega t)$$ 1 1

d) wenn $\dot{\Omega} \neq$ konst., $+ m_1 \dot{\Omega} l \sin(\Omega t)$ (zur rechten Seite) 1

$\Sigma$ 15