Bitte deutlich schreiben!

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Name, Vorname:

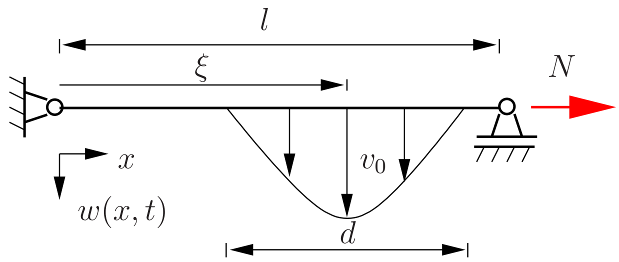
Matr.-Nr.:

Studiengang:

$\boxed{1}$ (1+3+1+3+4=12 Punkte)

Betrachtet wird eine eingespannte Klaviersaite der Länge l, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c. Die Saite werde an der Stelle ξ vom Hammer der Breite d getroffen. Die Saite werde dabei initial nicht ausgelenkt ($w(x, t = 0) = 0$) und genüge zum Anfangszeitpunkt der skizzierten Geschwindigkeitsverteilung

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} = \begin{cases} v_0 \cos\frac{\pi(x-\xi)}{d} & \text{für } \xi - \frac{d}{2} \leq x \leq \xi + \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$



Das Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Schwingungsproblems mithilfe des Separationsverfahrens nach Bernoulli durch Beantwortung der im weiteren beschriebenen Schritte.

Gegeben: ϱ, A, ℓ, N

(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung? Wie läßt sich dabei die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit durch die gegebenen Größen ausdrücken?

(b) Verwenden Sie für die weitere Berechnung den Produktansatz von Bernoulli $w(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ und formen Sie die partielle Differentialgleichung derart um, daß zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen entstehen.

Für die weitere Berechnung benutzen Sie bitte die Lösungsansätze
$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$ und $T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$

(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems?

(d) Setzen Sie den Lösungsansatz in die Randbedingungen ein und leiten Sie die Frequenzgleichung her. Bestimmen Sie die Lösung der Frequenzgleichung und damit die Eigenkreisfrequenzen.

(e) Werten Sie nun auch die Anfangsbedingungen mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen aus.

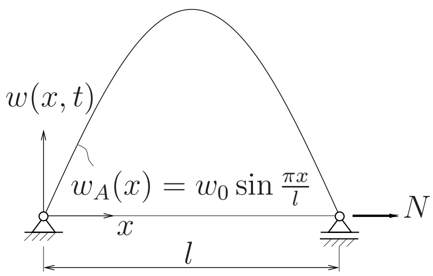
<u>allgemeine Hinweise zur Lösung gewisser bestimmter Integrale:</u>

$\int_0^l \sin^2(\lambda x)\, dx = \frac{l}{2}$

$\int_{\xi-\frac{d}{2}}^{\xi+\frac{d}{2}} \cos\frac{\pi(x-\xi)}{d} \sin(\lambda x) dx = \frac{2d\pi}{\pi^2-\lambda^2} \cos\left(\frac{\lambda d}{2}\right) \sin(\lambda\xi)$

2 (1+1+6+3+3=10 Punkte)

Eine Saite der Länge l wird derart durch eine Kraft N vorgespannt, daß sich in ihr Wellen mit der Geschwindigkeit c ausbreiten können. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w(x, t = 0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. In den folgenden Teilaufgaben soll die Bewegung der Saite mit dem Ansatz von d'Alembert berechnet werden.



Geg.: c, l, $w(x, t = 0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

(a) Notieren Sie dei Wellengleichung in Ort x und Zeit t.

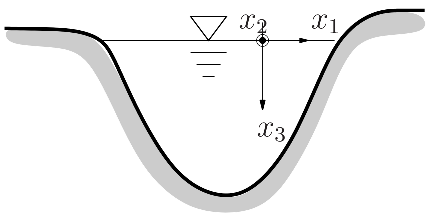
(b) Wie lautet die Koordinatentransformation nach d'Alembert für die Koordinaten z_1 und z_2?

(c) Berechnen Sie damit sukzessive $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Zeigen Sie, daß die Lösung der Differentialgleichung $w(x, t) = f(z_1) + g(z_2)$ sein muß.

(d) Leiten Sie diese Lösung nun nach der Zeit ab und arbeiten Sie beide Anfangsbedingungen ein, um zu zeigen, daß $w(x, t) = \frac{1}{2}\,(w_A(z_1) + w_A(z_2))$ ist.

(e) Wie lauten die Randbedingungen für das Problem? Benutzen Sie das Additionstheorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$, um zu zeigen, daß beide Randbedingungen identisch erfüllt sind.

3 (1+3+3+2+3+2=14 Punkte)



Berechnen Sie für ein stehendes Gewässer unter Berücksichtigung der Kompressibilität von Wasser $\kappa_T \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ die Dichte und den Druck in der Tiefe $x_3 = z$, indem Sie nachfolgend beschriebene Rechenschritte durchführen.

(a) Wie lautet die Impulsbilanz lokal in regulären Punkten?

(b) Spezialisieren Sie die drei Komponenten der Impulsbilanz auf ein stehendes Gewässer und zeigen Sie für das gezeichnete Koordinatensystem, daß gilt: $p = p(x_3)$ und $\frac{dp}{dx_3} = \varrho g$.

(c) Erinnern Sie sich an die thermische Zustandsgleichung. Hier gilt für den Druck $p = p(\varrho, T)$. Nehmen Sie isotherme Verhältnisse an und zeigen Sie, daß folgende Gleichung gilt: $\frac{dp}{dx_3} = \frac{1}{\varrho\kappa_T}\frac{d\varrho}{dx_3}$.

(d) Setzen Sie dieses Ergebnis in (b) ein und zeigen Sie, daß $\varrho(z) = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_0} - \kappa_T g z}$.

(e) Zeigen Sie nun noch, daß der Druck in der Tiefe z durch die Formel $p = p_0 + \frac{1}{\kappa_T} \ln\left(\frac{1}{(1-\kappa_T \varrho_0 g z)}\right)$ berechnet werden kann.

(f) Untersuchen Sie nun den Fall $\kappa_T \to 0$ und zeigen Sie unter Verwendung der Regel von l'Hospital $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, daß dann $p = p_0 + \varrho g z$ gilt.

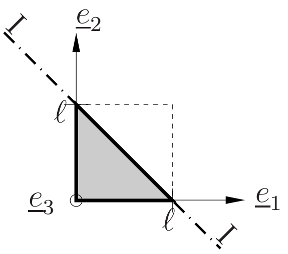
Theorieaufgaben

1. Gegeben ist der im dreidimensionalen Raum definierte Vektor $\underline{m} = \operatorname{div}\left(\underline{x} \times \underline{\underline{\sigma}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}\right)$. Differenzieren Sie den Ausdruck in einem ersten Schritt und spezialisieren Sie dann das Ergebnis auf die erste Komponente m_1. Achtung: Der Spannungstensor soll dabei nicht als symmetrisch angenommen werden!

   Geg.: $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

   $m_i =$

   $m_1 =$ **(2 Punkte)**

2. 

   Gegeben ist der 3-dimensionale Spannungszustand eines Würfels. Berechnen Sie den Spannungsvektor am Schnitt I-I gemäß der Cauchy-Tetraedergleichung.

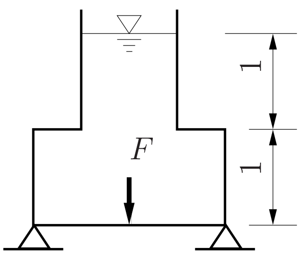
   Geg.: ℓ, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

   (1 Punkt)

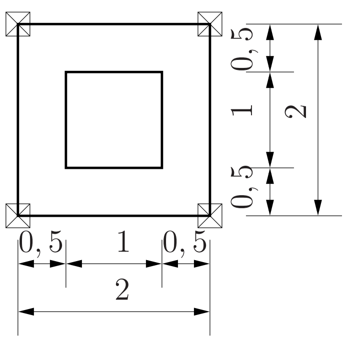
3. Gegeben ist das Feld $\psi(\underline{x}, t)$. Notieren Sie die substantielle Zeitableitung des Volumenintegrals, indem Sie das Reynoldssche Transporttheorem anwenden.

   $$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \psi(\underline{x}, t)\, dV = \int_{V(t)} \qquad\qquad + \oint_{\partial V(t)}$$ **(1 Punkt)**

4. Schnitt:

   Draufsicht:

   Welche resultierende Druckkraft F wird von dem im Behälter befindlichen Wasser auf den Behälterboden ausgeübt? Die Abmessungen des Behälters sind der Skizze zu entnehmen, alle Angaben sind in Meter.

   Geg.: $\varrho = 1000\text{kg/m}^3$, $g = 10\text{m/s}^2$

   F= **(1 Punkt)**

5. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen in den Einheiten 1, kg, m und s an:

spezifische Volumenkraft $\underline{f}$	
Dehnungstensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$	
Massenfluß $\dot{m}$	

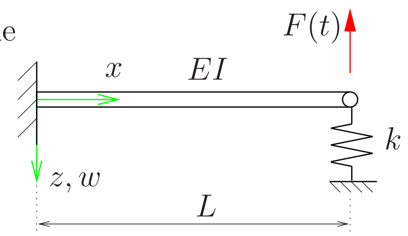
(1 Punkt)

6. Beschreiben Sie kurz in Worten, worin der Unterschied der Eulerschen zur Lagrangeschen Betrachtungsweise zur Darstellung von Bilanzgleichungen in der Mechanik besteht.

Euler:

Lagrange: **(1 Punkt)**

7. Wie lauten die zwei Randbedingungen am rechten Balkenende für den skizzierten transversal schwingenden Balken?



(2 Punkte)

8. Ist in einem runden Stab aus Stahl die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit der Scherwellen (Torsion) c_T größer, kleiner oder gleich der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen c_L? Kreuzen Sie die richtige Antwort bitte an.

- ◯ $c_T > c_L$
- ◯ $c_T < c_L$
- ◯ $c_T = c_L$

(1 Punkt)