Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Technische Universität Berlin
LKM

Klausur – Energiemethoden der Mechanik, WS 2014/15

Namen in lesbaren Druckbuchstaben angeben!

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit (Unterschrift): ____________

○ Studienbegleitende Prüfung (Bachelor)
○ Übungsscheinklausur (ohne Theorieteil)

T	
1	
2	
3	
Σ	

Theorieteil

Hinweis: Die Theorieaufgaben werden nur mit vollen Punkten bewertet. Falls Sie Lösungen der Theorieaufgaben auf einem Extrablatt schreiben, müssen Sie darauf auf dem Aufgabenblatt eindeutig hinweisen!

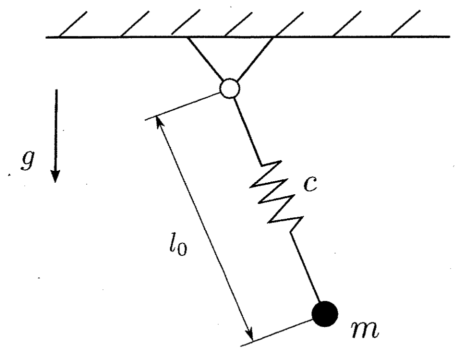
1. Geben Sie von den folgenden Größen die SI-Einheiten an (1, kg, m, s und K). **(1 Punkt)**

   Hinweis: Nur wenn alle Ergebnisse richtig sind, gibt es die Bewertungseinheit!

   Formänderungsenergiedichte w $kg\,m^{-1}\,s^{-2}$ spezifische Entropie s $m^{2}\,K^{-1}\,s^{-2}$

   virtuelle Verschiebung δu m innere Energie U $kg\,m^{2}\,s^{-2}$

2. Wie viele generalisierte Koordinaten werden **mindestens** zur Beschreibung des Systems benötigt. Bei der Länge l_0 ist die Feder weder gedehnt noch gestaucht. **(1 Punkt)**



   Anzahl der generalisierten Koordinaten

   $f = 2$

3. Wie vereinfacht sich das Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta(A - W_s - B) = 0$ für **(1 Punkt)**

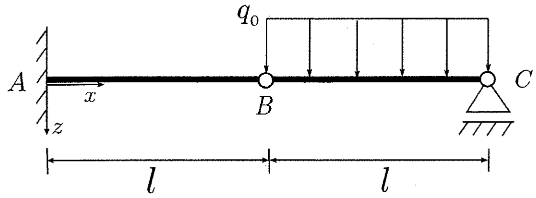
   a) Statik: $\delta(A - W_s) = 0$ $\delta B = 0$

   oder:

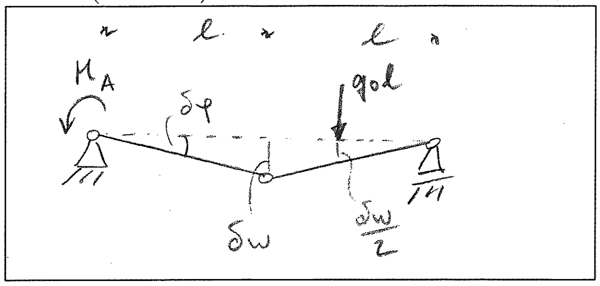
   b) Starre Körper: $\delta(A - B) = 0$ $\delta W_s = 0$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

4. Zwei gelenkig miteinander verbundene starre Träger werden wie skizziert durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Berechnen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen (für starre Körper) das im Punkt A wirkende Moment M_A. Zeichnen Sie dazu das durch eine virtuelle Verrückung ausgelenkte System (mit allen relevanten Verschiebungs- und Belastungsgrößen) und berechnen Sie dann die virtuelle Arbeit δA. *Tipp: Drehen Sie virtuell um A.* **(2 Punkte)**



Skizze (1 Punkt):



(1 Punkt)

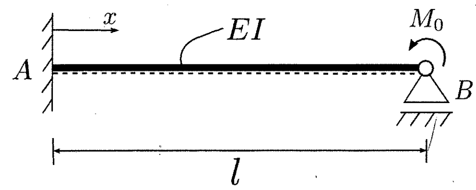
$\delta A = -M_A \frac{\delta w}{l} + q_0 l \frac{\delta w}{2} = 0$

$M_A = \frac{q_0 l^2}{2}$

5. Ein schubstarrer Balken mit der Biegesteifigkeit EI wird mit einem Moment M_0 im Punkt B belastet. Berechnen Sie mithilfe des 1. Satzes von CASTIGLIANO die Lagerkraft im Punkt B. Sie können dazu die Koppelintegraltabelle auf Seite 5 benutzen. **(2 Punkte)**

Hinweis: auf die richtige komplementäre Formänderungsenergie und das richtige Ergebnis gibt es jeweils einen Punkt

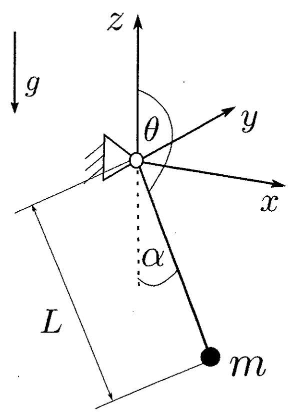
alternativ: $= \frac{l}{6EI}\left(3M_0^2 + 3M_0 F_B l + F_B^2 l^2\right)$



$W_s^* = \frac{l}{6EI}\left((M_0 + F_B l)^2 + M_0^2 + M_0(F_B l + M_0)\right)$

$F_B = -\frac{3}{2}\frac{M_0}{l}$

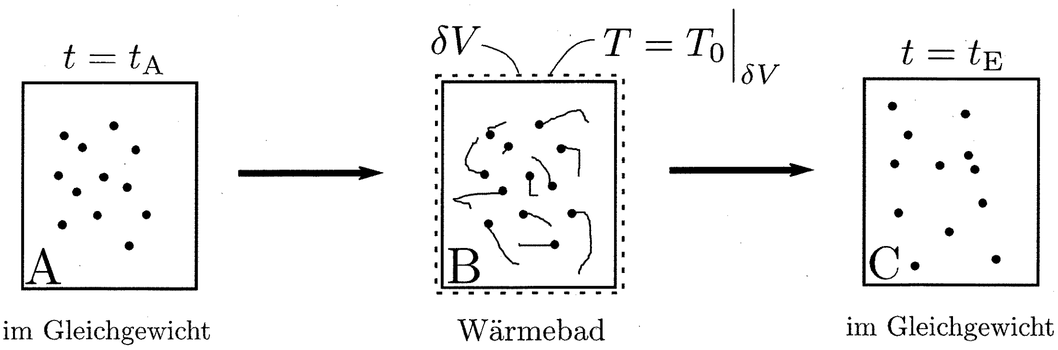
6. Für die LAGRANGEschen Gleichungen 1.Art werden Nebenbedingungen benötigt. Wie lautet im gegebenen Koordinatensystem die Nebenbedingung für das abgebildete Kugelpendel. **(1 Punkt)**



$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - L^2 = \boxed{0}$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin
Technische Universität Berlin
LKM

7. Gegeben sei ein mit einem Gas (Dichte ρ) gefüllter, geschlossener und als starr anzunehmender Behälter. Zum Zeitpunkt $t = t_\mathrm{A}$ befindet sich das System im Gleichgewicht (A). Anschließend wird der Behälter in ein Wärmebad gelegt (B). Am Rand des eingezeichneten Kontrollvolumens (gestrichelte Linie) kann eine konstante Temperatur $T = T_0$ angenommen werden. Der Behälter verbleibt im Wärmebad. Zum Zeitpunkt $t = t_\mathrm{E}$ stellt sich wieder ein Gleichgewicht ein (C). Strahlung und Volumenkrafteinflüsse sollen vernachlässigt werden.



Geg.: T_0, q_i, s, u, v_i, ρ, t_A, t_E, σ

Wählen Sie für den gegebenen Prozess die richtigen Bilanzgleichungen aus. *Hinweis: Maximal 2 Antworten sind zulässig! Mehr als 2 Antworten ergeben 0 Punkte! Pro richtiger Auswahl gibt es einen Punkt.* **(2 Punkte)**

- ☐ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \left(\rho\frac{v_i v_i}{2} + \rho u + \rho s\right) \mathrm{d}V = 0$
- ☐ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho s \,\mathrm{d}V - \oint_{\partial V(t)} \frac{q_j}{T_0} n_j \,\mathrm{d}A = \int_{V(t)} \sigma \,\mathrm{d}V < 0$
- ☒ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \left(\rho\frac{v_i v_i}{2} + \rho u\right) \mathrm{d}V = -\oint_{\partial V(t)} q_i n_i \,\mathrm{d}A$
- ☐ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho s \,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V(t)} \frac{q_j}{T_0} n_j \,\mathrm{d}A = \int_{V(t)} \sigma \,\mathrm{d}V = 0$
- ☐ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho\frac{v_i v_i}{2} \,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V(t)} q_i n_i \,\mathrm{d}A$
- ☒ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho s \,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V(t)} \frac{q_j}{T_0} n_j \,\mathrm{d}A = \int_{V(t)} \sigma \,\mathrm{d}V > 0$
- ☐ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \left(\rho\frac{v_i v_i}{2} + \rho u + \rho \ddot{u}_i\right) \mathrm{d}V = -\oint_{\partial V(t)} q_i n_i \,\mathrm{d}A$
- ☐ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho s \,\mathrm{d}V < -\oint_{\partial V(t)} \frac{q_j}{T} n_j \,\mathrm{d}A$

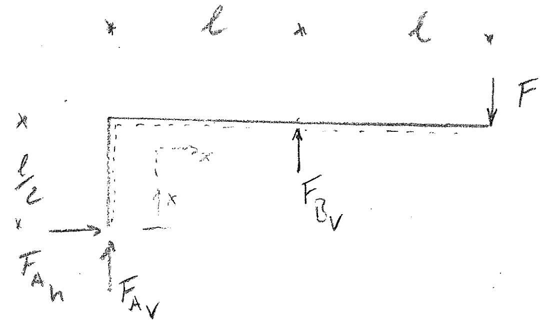
Musterlösung zur Klausur Energiemethoden der Mechanik

· WiSe 2014/15, 27.02.2015, $13^{00} - 15^{00}$ Uhr

Rechenteil

1] Satz von Castigliano

a)



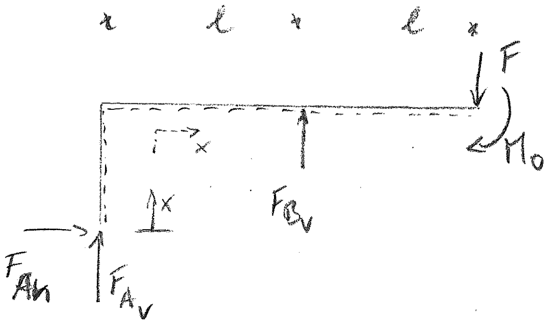
· Das System ist statisch bestimmt

· $F_{A_h} = 0$

· $F_{A_v} = -F$

· $F_{B_v} = 2F$

b) Ansatz: Ansetzen eines Hilfsmoments M_0 im Punkt C



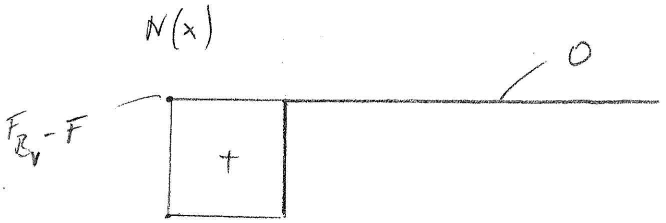
neue Lagerreaktionen

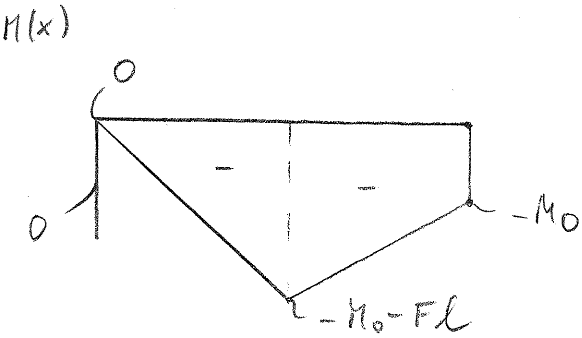
$$F_{A_h} = 0$$

$$F_{A_v} = -F - \frac{M_0}{l}$$

$$F_{B_v} = 2F + \frac{M_0}{l}$$

~> Aufzeichnen der Normalkraft- und Momentenflächen





$$W_s^* = \frac{1}{2EA}\int_l N^2(x)\,dx + \frac{1}{2EI}\int_l M^2(x)\,dx$$

mit Koppelintegral Tabelle :

$$W_s^* = \frac{1}{2EA}\int_0^{\frac{l}{2}} \quad F_{Bv}-F \quad F_{Bv}-F \quad dx + 0 + 0 +$$

$$+ \; 0 \; + \frac{1}{2EI}\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3}{2}l} \quad -M_0-Fl \quad -M_0-Fl \quad dx \; +$$

$$+ \frac{1}{2EI}\int_{\frac{3}{2}l}^{\frac{5}{2}l} \quad -M_0-Fl \quad -M_0 \quad -M_0-Fl \quad -M_0 \quad dx$$

$$W_s^* = \frac{1}{2EA}\,\frac{l}{2}\left(F+\frac{M_0}{l}\right)^2 + \frac{1}{2EI}\left[\frac{l}{3}\left(M_0+Fl\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{6}\left(2\left(M_0+Fl\right)^2 + 2M_0^2 + 2M_0\left(M_0+Fl\right)\right)\right]$$

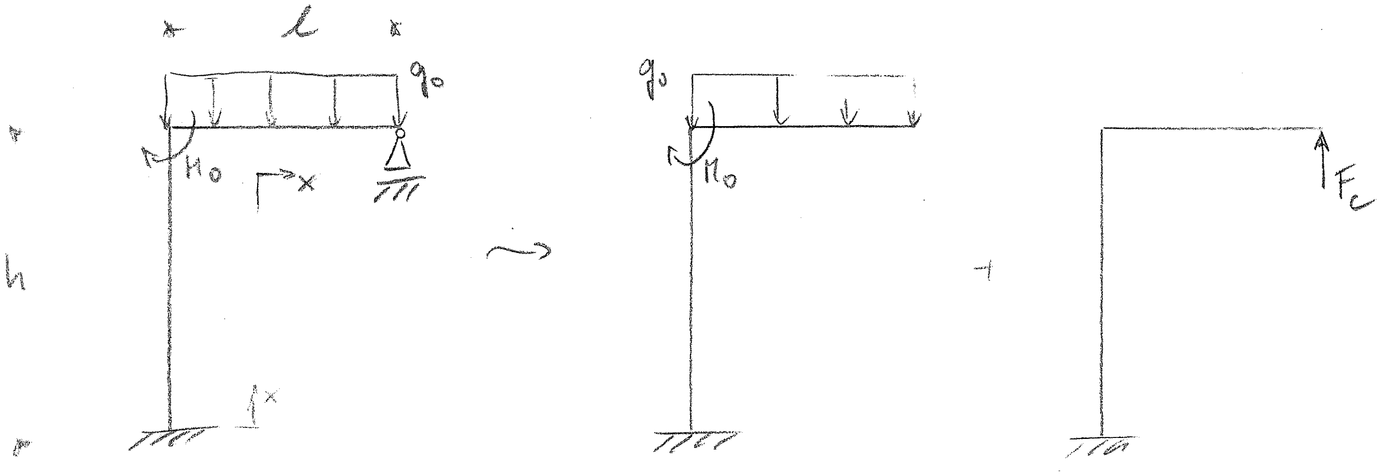
1. Satz von Castigliano

$$\left.\frac{\partial W_s^*}{\partial M_0}\right|_{M_0=0} = \varphi$$

$$\left.\frac{\partial W_s^*}{\partial M_0}\right|_{M_0=0} = \frac{F}{2EA} + \frac{5Fl^2}{6EI} = \varphi$$

2] Prinzip der virtuellen Kräfte

a) Zerlegen des Systems in 2 statisch bestimmte Teilsysteme



Teilsystem I

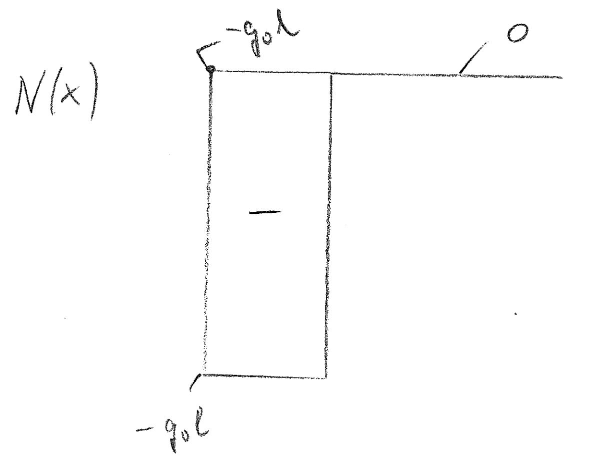
Teilsystem II

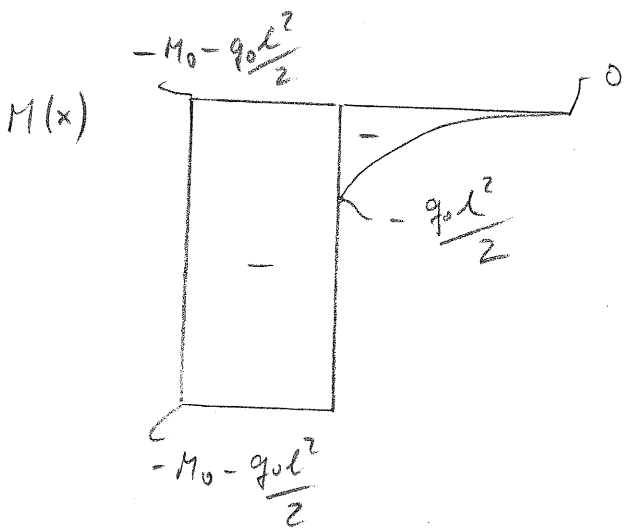
b) Ansatz: Superposition $\rightsquigarrow$ $\delta_C = \delta_C^{I} + \delta_C^{II} = 0$

δ_C - Verschiebung im Punkt C

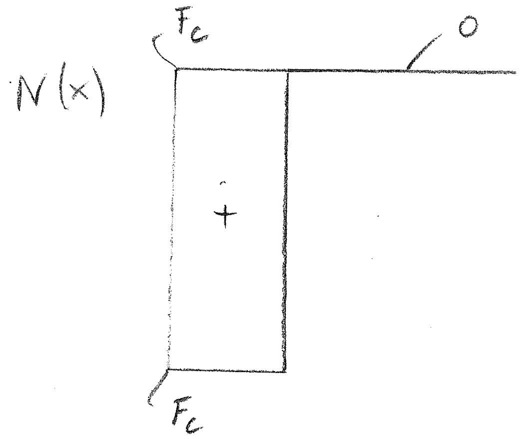
c) Normalkraft- und Momentenflächen

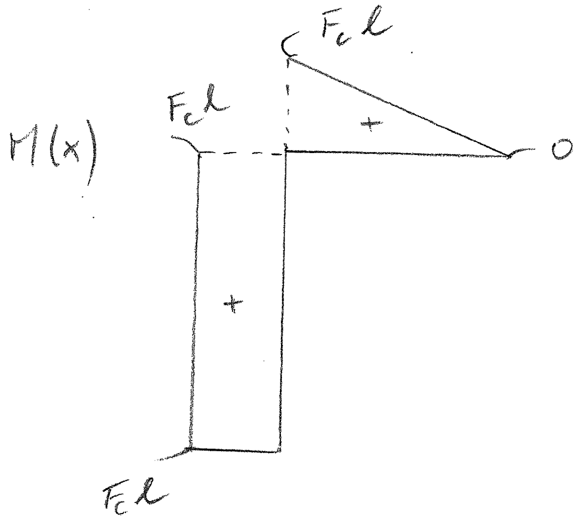
Teilsystem I



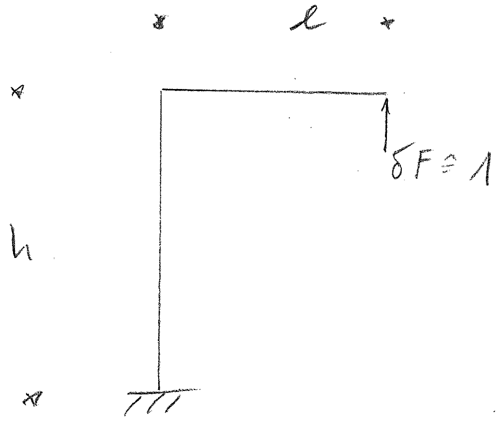


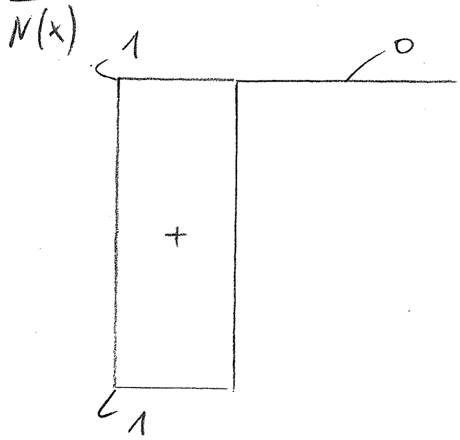
Teilsystem II

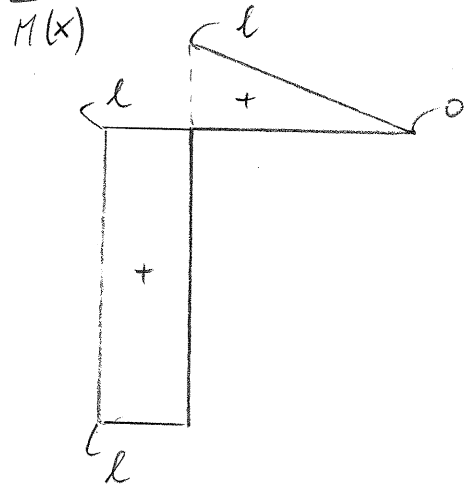




Testsystem (System ohne eingeprägte Lasten mit virtueller Kraft bzw. 1-Kraft, $\delta F = 1$, am Punkt C)







d)

$$\delta = \frac{1}{EA}\int_L N(x)\,\overline{N}(x)\,dx + \frac{1}{EI}\int_L M(x)\,\overline{M}(x)\,dx$$

Teilsystem I

$$\delta_c^I = \frac{1}{EA}\int_0^h \boxed{-q_0 l}\;\boxed{1}\;dx + 0 +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^h \boxed{-\left(M_0 + \frac{q_0 l^2}{2}\right)}\;\boxed{l}\;dx + \frac{1}{EI}\int_h^{h+l} \left(-\frac{q_0 l^2}{2}\right)\;(l)\;dx$$

$$\delta_c^{I} = -\frac{1}{EA}\,h q_0 l - \frac{1}{EI}\,h l\left(M_0 + \frac{q_0 l^2}{2}\right) - \frac{1}{EI}\,l\,\frac{q_0 l^3}{8}$$

$$= -\frac{h q_0 l}{EA} - \frac{1}{EI}\left(M_0 l h + \frac{q_0 l^3}{2} h + \frac{q_0 l^4}{8}\right)$$

Teilsystem II

$$\delta_c^{II} = \frac{1}{EA}\int_0^h \boxed{F_c}\;\boxed{1}\;dx + 0 +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^h \boxed{F_c l}\;\boxed{l}\;dx + \frac{1}{EI}\int_h^{h+l} F_c l \;\; l \; dx$$

$$\delta_c^{II} = \frac{F_c h}{EA} + \frac{F_c l^2 h}{EI} + \frac{F_c l^3}{3EI}$$

$$= F_c\left(\frac{h}{EA} + \frac{1}{EI}\left(l^2 h + \frac{l^3}{3}\right)\right)$$

e) $$\delta_c = \delta_c^{I} + \delta_c^{II} \overset{!}{=} 0$$

$$F_c = \frac{\dfrac{h q_0 l}{EA} + \dfrac{1}{EI}\left(M_0 l h + \dfrac{q_0 l^3}{2} h + \dfrac{q_0 l^4}{8}\right)}{\dfrac{h}{EA} + \dfrac{1}{EI}\left(l^2 h + \dfrac{l^3}{3}\right)}$$

3) Lagrangesche Gleichungen 2. Art

a) $f = p - k$ $\quad p = 2 \cdot 3 = 6$

$k = 4$

$2 = 6 - 4$

kinematische Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= x \\ y_M &= 0 \\ \alpha_M &= 0 \\ x_m &= x + \frac{\ell}{2}\sin\varphi \\ y_m &= \frac{\ell}{2}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{abh. von } x, \varphi \implies \underline{q} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\alpha_m = \varphi$$

b)

→ Ortsvektoren

$$\underline{x}_M = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}_m = \begin{pmatrix} x + \frac{\ell}{2}\sin\varphi \\ \frac{\ell}{2}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

→ Geschwindigkeitsvektoren

$$\underline{\dot{x}}_M = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\dot{x}}_m = \begin{pmatrix} \dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

→ kinetische Energie

$$E^{kin} = \frac{1}{2} M \underline{\dot{x}}_M^2 + \frac{1}{2} m \underline{\dot{x}}_m^2 + \frac{1}{2}\Theta_S \dot{\varphi}^2$$

→ Bestimmung von Θ_S:

$$\Theta_A = \Theta_S + \frac{\ell^2}{4} m \implies \Theta_S = \Theta_A - \frac{\ell^2}{4} m$$

$\boxed{7}$

$$E^{kin} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x} + \frac{\ell}{2} \dot{\varphi} \cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\left(\Theta_A - \frac{\ell^2}{4} m\right)\dot{\varphi}^2$$

$$E^{kin} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta_A \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \ell \cos\varphi \, \dot{x} \dot{\varphi}$$

$$U = mg \frac{\ell}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2} c \left(x - u(t)\right)^2$$

$\rightsquigarrow$ Lagrange-Funktion $L = E^{kin} - U$

$$L = \frac{1}{2}\Big((M+m)\dot{x}^2 + \Theta_A \dot{\varphi}^2 + m\ell \cos\varphi \, \dot{x}\dot{\varphi} - mg\ell\cos\varphi - c\left(x-u(t)\right)^2 \Big)$$

c) nicht-konservative Kräfte Q_k^*

$$Q_k^* = \sum_{i=1}^{2} \underline{F}_i^{n.k.} \cdot \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{2} M_i^{n.k.} \frac{\partial q_i}{\partial q_k}$$

$i = 1, 2$ ($1 \to M$, $2 \to m$)

$$Q_1^* = \underline{F}_1^{n.k.} \cdot \underbrace{\frac{\partial \underline{x}_1}{\partial x}}_{=1} + 0 + 0 + (-k)\dot{\varphi} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{=0}$$

$$\underline{Q_1^* = F(t)}$$

$$Q_2^* = \underline{F}_1^{n.k} \cdot \underbrace{\frac{\partial \underline{x}_1}{\partial \varphi}}_{=0} + 0 + 0 + (-k)\dot{\varphi} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}}_{=1}$$

$$\underline{Q_2^* = -k\dot{\varphi}}$$

d) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^*$$

$q_1 = x$: $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + \frac{1}{2} m l \cos\varphi \, \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + \frac{ml}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -c\left(x - u(t)\right)$$

Bewegungsgleichung:

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{ml}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) + c\left(x - u(t)\right) = F(t)$$

$q_2 = \varphi$: $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta_A \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m l \cos\varphi \, \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \Theta_A \ddot{\varphi} + \frac{ml}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{x} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\dot{x}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{ml}{2}\sin\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{ml}{2} g \sin\varphi$$

Bewegungsgleichung:

$$\Theta_A \ddot{\varphi} + \frac{ml}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{x} - \sin\varphi\, g\right) = -k\dot{\varphi}$$
