Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

1. Klausur Kinematik und Dynamik SS 2012

Name, Vorname:

Matr.-Nr.: Musterlösung

Studiengang:

○ Studienbegleitende Prüfung (Bachelor)
○ Übungsscheinklausur (ohne Theorieteil)

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m, s und N an:

Reibungskoeffizient dim[μ] = 1	Knicksicherheit dim[ν] = 1
Beschleunigung dim[$\underline{a}$] = m/s^2	Biegesteifigkeit dim[EI] = Nm^2

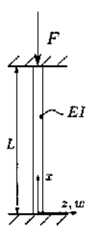
(2 Punkte)

2. Es seien $\underline{e}_r = \cos(\varphi)\underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{e}_y$ und $\underline{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\underline{e}_x + \cos(\varphi)\underline{e}_y$ gegeben. Zeigen Sie, dass für die zeitliche Änderung des $\underline{e}_\varphi$-Vektors der folgende Zusammenhang gilt: $\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\underline{e}_r$.

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\cos(\varphi)\dot\varphi\,\underline{e}_x - \sin(\varphi)\dot\varphi\,\underline{e}_y = -\dot\varphi\left(\cos(\varphi)\underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{e}_y\right)$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot\varphi\,\underline{e}_r$$

(1 Punkt)

3. 

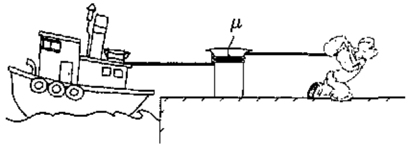
Geben Sie nur die Randbedingungen an, die für die Berechnung der kritischen Knicklast F_{krit} notwendig sind. Formulieren Sie alle Randbedingungen in $w(x)$. **Geg.:** L, EI

$w(x=0) = 0$, $w'(x=0) = 0$

$w(x=L) = 0$, $w'(x=L) = 0$

(1 Punkt)

4. Der Matrose Popeye soll das Schiff am Ufer halten. Der Motor des Schiffes entwickelt eine Kraft S_{mot} auf das Seil. Wie oft muss das Seil um den Poller gelegt werden, um nur mit der Kraft S_{pop} das Schiff halten zu können? Es wirkt Seilreibung nach Euler-Eytelwein mit dem Haftreibkoeffizienten μ. **Geg.:** S_{mot}, S_{pop}, μ



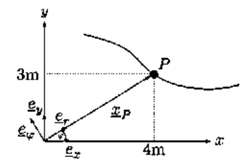
$S_{mot} > S_{pop}$, $S_{mot} = S_{pop}\exp(n2\pi)$

$$n = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{S_{mot}}{S_{pop}}\right)$$

(1 Punkt)

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5. Geben Sie den Ortsvektor des Punktes P einmal im kartesischen Koordinatensystem $\underline{e}_x, \underline{e}_y$ und einmal im Polarkoordinatensystem $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi$ an.

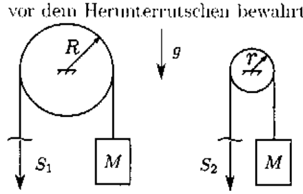


$\underline{x}_{P,kart} = 4\underline{e}_x + 3\underline{e}_y$

$\underline{x}_{P,polar} = 5\underline{e}_r$

(1 Punkt)

6. Eine Masse M wird über zwei verschiedene Rollen festgehalten. Bei beiden Rollen herrscht Seilreibung nach Euler-Eytelwein, jedoch ist der Radius der Rollen unterschiedlich. Es gilt $R > r$. Wie unterscheiden sich die Seilkräfte S_1 und S_2 bei beiden Systemen, wenn die Masse gerade noch vor dem Herunterrutschen bewahrt werden soll. Kreuzen Sie die zutreffende Beziehung an.

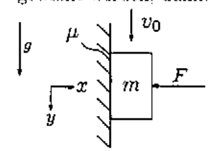


- [ ] $S_1 < S_2$
- [x] $S_1 = S_2$
- [ ] $S_1 > S_2$

(1 Punkt)

7. Die Masse m rutscht an einer senkrechten Wand mit der Geschwindigkeit v_0 nach unten. Zwischen Wand und Masse herrscht Coulombsche Reibung mit dem Reibungskoeffizienten μ. Wie muss F gewählt werden, damit die Masse m abgebremst wird.

$\ddot{y} < 0$



- [x] $F > \frac{mg}{\mu}$
- [ ] $F < mg$
- [ ] $F > \mu mg$

$m\ddot{y} = -\mu F + mg < 0$

(1 Punkt)

8. Die Beschleunigung einer eindimensinalen Bewegung einer Kugel ist gegeben durch $a(t) = a_0\sin(kt)$. Die Kugel ist am Anfang in Ruhe. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kugel zu einem beliebigen Zeitpunkt t.
Geg.: a_0 =konst., k =konst.

$$v(t) = -\frac{a_0}{k}\cos(kt)$$

(1 Punkt)

9. Die Geschwindigkeit $v(x) = v_0\cos(x^2/l^2)$ sei als Funktion des Weges $x(t)$ gegeben. Bestimmen Sie die Beschleunigung $a(x)$.
Geg.: v_0 =konst., l =konst.

$\frac{dv}{dx}v = a$

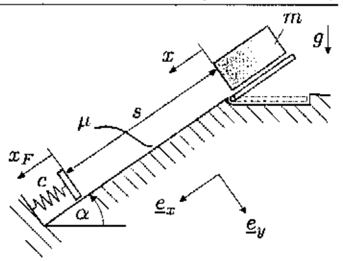
$$a(x) = -v_0\sin\left(\frac{x^2}{l^2}\right)\frac{2x}{l^2}v_0\cos\left(\frac{x^2}{l^2}\right) = -\frac{v_0^2 x}{l^2}\sin\left(\frac{2x^2}{l^2}\right)$$

(1 Punkt)

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

1 (14 Punkte)

In einer Förderanlage befindet sich eine Rampe, auf der die zu befördernden Kisten (Masse m) herunterrutschen. Am Ende der Gleitstrecke werden sie durch einen elastischen Anschlag (Federkonstante c) abgebremst. Zwischen Kiste und der Rampe wird COULOMBsche Reibung mit dem Reibungsbeiwert μ angenommen.



(a) Schneiden Sie die Kiste frei für einen Zeitpunkt bevor sie auf die Feder trifft und formulieren Sie das 2. NEWTONsche Gesetz in $\underline{e}_x$- und $\underline{e}_y$-Richtung.

(b) Welche Zeit t_s benötigt die Kiste bis zum Berühren des Anschlages und welche Geschwindigkeit v_s hat sie dabei, wenn sie aus der Ruhelage bei $x = 0$ freigegeben wird?

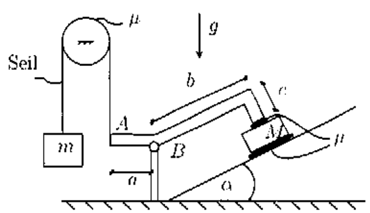
(c) Schneiden Sie nun die Kiste frei für einen Zeitpunkt nach dem sie die Feder erreicht hat und formulieren Sie auch hierfür das 2. NEWTONsche Gesetz in $\underline{e}_x$- und $\underline{e}_y$-Richtung. Bestimmen Sie damit eine Bewegungsgleichung für die Kiste in der Koordinate x_F.

(d) Wie groß ist der Federweg x_{Fmax}, der zum Abbremsen der Kiste auf die Geschwindigkeit Null notwendig ist? Die Masse des elastischen Anschlags soll vernachlässigt werden.
(**Hinweis**: Benutzen Sie die Trennung der Variablen!)

Geg.: $m,\ g,\ s,\ c,\ \mu,\ \alpha$

2 (12 Punkte)

Auf der schiefen Ebene wird ein Block (Masse M) durch einen Hebel festgehalten. Der Hebel wird wiederrum durch ein über eine Rolle laufendes Seil gehalten. Zwischen Masse M, Hebel und Ebene herrscht jeweils Reibung. Auch zwischen Rolle und Seil herrscht Reibung.



(a) Schneiden Sie das System frei und berechnen Sie die notwendige Seilkraft S_A in Punkt A, damit die Masse M festgehalten wird. Gehen Sie dazu von COULOMBscher Reibung aus.

(b) Wie groß muss nun m gewählt werden, damit S_A aufgebracht wird. Benutzen Sie dazu die EULER-EYTELWEIN-Gleichung.

(c) Wie groß muss b gewählt werden, damit Selbstsperrung auftritt und der Block auch ohne Masse m fesgehalten wird?

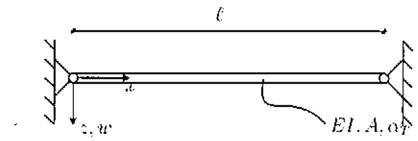
(d) Bei welchem Winkel α tritt auf jeden Fall Selbstsperrung ein?

Geg.: $a,\ b,\ c,\ m,\ M,\ \alpha,\ \mu$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 (14 Punkte)

Der skizzierte Stab (Länge ℓ, Biegesteifigkeit EI, Querschnittsfläche A und Ausdehnungskoeffizient α_T) wird bei der Temperatur T_1 spannungsfrei eingebaut. Nun wird der Stab gleichförmig auf die Temperatur T_2 erwärmt. Die zugehörige Differentialgleichung und ihre allgemeine Lösung lauten:



$$w''''(x) + \alpha^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$
$$w(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\alpha x + D \tag{1}$$

(a) Benutzen Sie das HOOKEsche Gesetz und berechnen Sie die aus der Temperaturerhöhung resultierende Normalkraft N im Balken.

(b) Formulieren Sie geeignete Randbedingungen und verwenden Sie diese mit (1), um ein Gleichungssystem in Matrixschreibweise aufzustellen.

(c) Benutzen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix, um eine Bestimmungsgleichung für α aufzustellen.

(d) Bestimmen Sie die kritische Knicklast F_k.

(e) Bestimmen Sie die Temperatur T_2, bei der der Stab knickt.

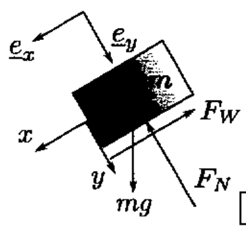
(f) Wie groß darf T_2 sein, damit im Stab immer noch eine Knicksicherheit $\nu = \frac{F_k}{F}$ besteht?

Geg.: $E,\ I,\ A,\ \alpha_T,\ T_1,\ \ell,\ \nu$

1 Aufgabe

(a)

Freischnitt:



$\boxed{1}$

Newton:

$$\begin{aligned} \underline{e}_x: \quad m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F_W \boxed{1} \\ \underline{e}_y: \quad m\ddot{y} &= mg\cos\alpha - F_N \boxed{1} \end{aligned}$$

(b)

Kinematik:

$$\ddot{y} = 0 \quad \boxed{1} \Rightarrow \quad F_N = mg\cos\alpha \boxed{1}$$

Coulombsche Reibung:

$$F_W = \mu F_N \quad \Rightarrow \quad F_W = \mu mg\cos\alpha$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \\ \dot{x}(t) &= g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)t + \underbrace{v_0}_{=0} \\ x(t) &= \frac{g}{2}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)t^2 + \underbrace{x_0}_{=0} \boxed{1} \end{aligned}$$

Rutschstrecke ist s:

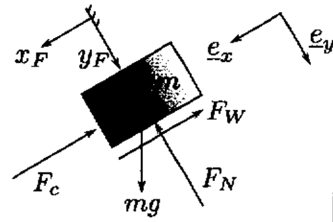
$$\begin{aligned} x(t_s) &= s = \frac{g}{2}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)t_s^2 \\ t_s &= \sqrt{\frac{2s}{g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}} \boxed{1} \end{aligned}$$

Geschwindigkeit v_s:

$$v_s = v(t_s) = \sqrt{2sg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)} \boxed{1}$$

(c)

Freischnitt:



$\boxed{1}$

Newton:

$$\begin{aligned} \underline{e}_x: \quad m\ddot{x}_F &= mg\sin\alpha - F_W - F_c \\ \underline{e}_y: \quad m\ddot{y}_F &= mg\cos\alpha - F_N \boxed{1} \end{aligned}$$

Kinematik:

$$\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_N = mg\cos\alpha$$

Coulombsche Reibung:

$$F_W = \mu F_N \quad \Rightarrow \quad F_W = \mu mg\cos\alpha$$

Hookesche Federgesetz:

$$F_c = cx_F \boxed{1}$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_F &= mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - cx_F \\ a_F &= g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - \frac{c}{m}x_F \boxed{1} \end{aligned}$$

(d)

Trennung der Variablen:

$$a_F = \frac{dv_F}{dt} = \frac{dv_F}{dx_F}v_F \quad \Rightarrow \quad \int_0^{x_{F,\max}} a_F dx_F = \int_{v_s}^{0} v_F dv_F \boxed{1}$$

$$\frac{c}{2m}x_{F,\max}^2 - g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)x_{F,\max} - sg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) = 0$$

$$x_{F,\max} = \frac{mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2cs}{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}\right)}{c} \boxed{1}$$

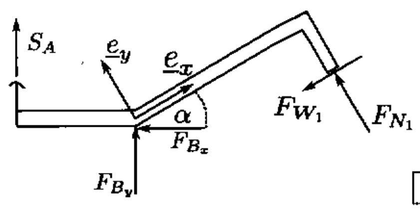
$\boxed{\sum 14 \text{ Punkte}}$

2 Aufgabe

(a)

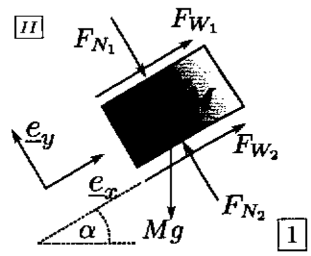
Freischnitt:

$\boxed{I}$



$\boxed{1}$

$\boxed{II}$



$\boxed{1}$

$\boxed{I}$ $\sum M^{(B)} = 0: \quad -S_A a + F_{N_1} b - F_{W_1} c = 0 \quad (1)\boxed{1}$

$\boxed{II}$ $\sum F_x = 0: \quad F_{W_1} + F_{W_2} - Mg\sin\alpha = 0 \quad (2)\boxed{1}$

$\sum F_y = 0: \quad -F_{N_1} + F_{N_2} - Mg\cos\alpha = 0 \quad (3)\boxed{1}$

COULOMBsches Reibungsgesetz:

$$F_{W_1} = \mu F_{N_1} \quad F_{W_2} = \mu F_{N_2}\boxed{1}$$

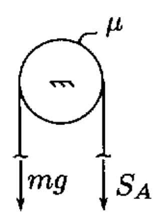
Zusammenfassen:

$$(2) - \mu\,(3) \Rightarrow 2\mu F_{N_1} - Mg\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow F_{N_1} = \frac{Mg}{2\mu}\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\boxed{1}$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{(b - \mu c)\,Mg\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2\mu a}\boxed{1}$$

(b)



Lastseite ist bei mg. Euler-Eytelwein:

$$mg = S_A e^{\mu\pi} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{S_A}{g} e^{\mu\pi}\boxed{1}$$

S_A einsetzen:

$$m = \frac{e^{\mu\pi}\,(b - \mu c)\,M\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2a\mu}\boxed{1}$$

(c)

Selbstsperrung wenn Term auf der rechten Seite negativ:

$$b - \mu c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \mu c\boxed{1}$$

(d)

$$m = \frac{e^{\mu\pi}}{2a\mu}\,(b - \mu c)\,M\,\underbrace{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}_{=0} = 0$$

Wahrscheinlich soll hier $b - \mu c > 0$ sein. Für den Winkel α gilt dann:

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\mu\boxed{1}$$

$\boxed{\sum 12 \text{ Punkte}}$

3 Aufgabe

(a)

$$\sigma = E\varepsilon^{el}; \quad \varepsilon^{tot} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{th} \quad \Rightarrow \varepsilon^{el} = \frac{\Delta l}{l} - \alpha_T \Delta T$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-F}{A} = EA\left(\underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{=0} - \alpha_T \Delta T\right)\boxed{1}$$

Hier Vorzeichen von F im Sinne von Knickungsaufgaben gewählt.

$$N = -EA\alpha_T\,(T_2 - T_1) = -F\boxed{1}$$

(b)

Randbedingungen:

$$w\,(0) = 0 \quad (1)\boxed{1} \qquad w\,(l) = 0 \quad (3)\boxed{1}$$
$$w''\,(0) = 0 \quad (2)\boxed{1} \qquad w''\,(l) = 0 \quad (4)\boxed{1}$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} w(x) &= A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\alpha x + D \\ w'(x) &= -A\alpha\sin(\alpha x) + B\alpha\cos(\alpha x) + C\alpha \\ w''(x) &= -A\alpha^2\cos(\alpha x) - B\alpha^2\sin(\alpha x)\boxed{1} \end{aligned}$$

Randbedingungen auswerten:

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow &\quad A + D = 0 \\ (2) \Rightarrow &\quad A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &\Rightarrow A\cos(\alpha l) + B\sin(\alpha l) + C\alpha l + D = 0 \\ (4) &\Rightarrow -A\alpha^2\cos(\alpha l) - B\alpha^2\sin(\alpha l) = 0 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha l) & \sin(\alpha l) & \alpha l & 1 \\ -\cos(\alpha l) & -\sin(\alpha l) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boxed{1}$$

(c)

Alternativ mit Determinante:

$$\det \underline{M} = 0 \quad \boxed{1} \Rightarrow \quad \sin(\alpha l)\,\alpha l = 0\boxed{1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_n l = n\pi \quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{l}\boxed{1}$$

(d)

$$F_k = \alpha_1^2 EI = \frac{\pi^2}{l^2} EI\boxed{1}$$

(e)

$$F_k = \frac{\pi^2}{l^2} EI = EA\alpha_T = (T_2 - T_1)\boxed{1}$$

(f)

$$\nu = \frac{F_k}{F} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 EA\alpha_T (T_2 - T_1)}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{\pi^2 I}{\nu A\alpha_T l^2}\boxed{1}$$

$\boxed{\sum 14 \text{ Punkte}}$