Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Kinematik und Dynamik SS 2010, 1. Klausur, 29.05.2010

Bitte deutlich in <u>DRUCKSCHRIFT</u> schreiben!

Name, Vorname: Musterlösung
Matr.-Nr.:
Studiengang:

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Bitte ankreuzen!
○ Studienbegleitende Prüfung ○ Übungsscheinklausur

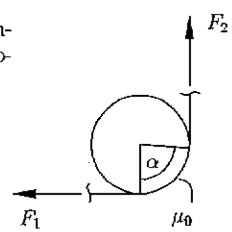
Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten in den SI-Einheiten 1, kg, m und s an:

Potentielle Energie E^{pot}	$\frac{kg\, m^2}{s^2}$
Impuls $\underline{p}$	$kg\,\frac{m}{s}$
Wegfederkonstante c	$\frac{kg}{s^2}$
Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$	$\frac{1}{s^2}$

2 Punkte

2. Ein ruhendes Seil ist gemäß der Skizze mit einem Umschlingungswinkel α um einen Poller gelegt. Es gelte $F_1 > F_2$ und der Haftungskoeffizient zwischen Seil und Poller hat den Wert μ_0.
Welcher Zusammenhang gilt dann zwischen F_1 und F_2?

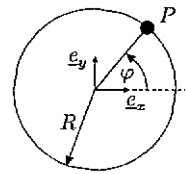


$$F_1 \underset{(\leq)}{=} F_2\, e^{\mu_0 \alpha}$$

1 Punkt

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

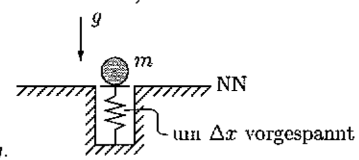
3. Der Punkt P bewegt sich auf dem Kreis mit dem Radius R mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Geben Sie für den Punkt P in der kartesischen Basis $\underline{e}_x, \underline{e}_y$ den Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}(\varphi)$ als eine Funktion des Winkels φ an. Gegeben: R, ω



$$\underline{v}(\varphi) = \omega R(-\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y)$$

1 Punkt

4. Eine lineare Feder mit Steifigkeit c wird um den Wert Δx vorgespannt. Dann schießt die Feder die Masse m nach oben. Dabei entspannt sich die Feder. Bis in welche maximale Höhe h fliegt die Kugel (ohne Luftwiderstand)?



Geg.: m, c, Δx, g.

$$h = \frac{c\,\Delta x^2}{2mg}$$

1 Punkt

5. Gegeben sei die Geschwindigkeit $v(x) = Ae^{Cx}$ eines Massenpunktes in Abhängigkeit seines Ortes $x(t)$, wobei A = const. und C = const. im Ort sich nicht ändern. Berechnen Sie die Beschleunigung $a(x)$ in Abhängigkeit des Ortes $x(t)$!

$$a(x) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} = ACe^{Cx} A e^{Cx} = A^2 C e^{2Cx}$$

1 Punkt

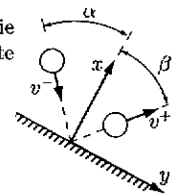
6. Die potentielle Energie ist gegeben durch $E^{pot} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + mgy$. Bestimmen Sie die dazugehörige Kräfte F_x und F_y! m, g und ω sind konstant.

$$F_x = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = m\omega^2 x \qquad F_y = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} = -mg$$

1 Punkt

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

7. Ein Massepunkt stößt auf eine glatte Ebene, wobei v^- und v^+ die Geschwindigkeiten unmittelbar vor bzw. nach dem Stoß sind. Bitte kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

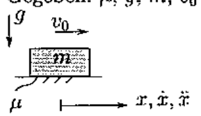


	$v^+ = v^-$	$v^+ < v^-$	$v^+ > v^-$	$\beta = \alpha$	$\beta < \alpha$	$\beta > \alpha$
$e = 1$	X			X		
$0 < e < 1$		X				X
$e = 0$		X				X

2 Punkte

8. Ein Klotz der Masse m rutscht reibungsbehaftet (Reibungskoeffizient μ) auf einer horizontalen Ebene. Welche Beschleunigung hat der skizzierte Klotz für den Fall, dass die Geschwindigkeit $v_0 > 0$ ist? Bitte ankreuzen.

Gegeben: μ, g, m, v_0



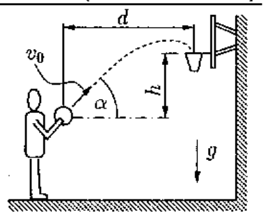
☐ $\ddot{x} = mg$ ☒ $\ddot{x} = -\mu g$ ☐ $\ddot{x} = 0$ ☐ $\ddot{x} = \mu g$

1 **Punkt**

Rechenteil

1 (13 Punkte)

Ein mechanischer Basketballspieler wirft den Ball immer unter dem Winkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ab. Benutzen Sie für ihre Rechnung ein Koordinatensystem, das im Ausgangspunkt des Balles liegt.



(a) Berechnen Sie zunächst $\underline{x}(t)$.

(b) Berechnen Sie daraus die Endzeit t_e, nach welcher der Ball die Strecke d zurückgelegt hat.

(c) Wie groß muss die Abwurfgeschwindigkeit v_0 sein, damit der Ball den Korb trifft?

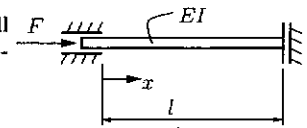
(d) Ab welcher minimalen Entfernung d von der Wand hat er keine Möglichkeit mehr zu treffen?

Geg.: α, h, d, Erdbeschleunigung g

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2 (14 Punkte)

Der dargestellte Balken ist mit einer Kraft $F > 0$ belastet. Es soll das Knickproblem untersucht werden. Die zugehörige Differentialgleichung und ihre Lösung lauten:



$$w''''(x) + \alpha^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$w(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\alpha x + D \qquad (2)$$

(a) Formulieren Sie vier Randbedingungen und verwenden Sie diese mit (2), um 4 Gleichungen für die 4 Konstanten in (2) aufzustellen.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwertgleichung (charakteristische Gleichung).

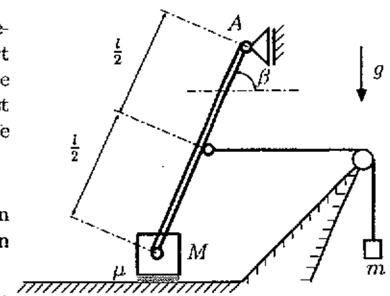
(c) Berechnen Sie die kritische Last F_{krit}.

(d) Skizzieren Sie in einem Diagramm den qualitativen Verlauf der 1. und 2. Eigenform des Systems. Nehmen Sie dazu $A = w^*$ an. Achten Sie darauf dass die Randbedingungen deutlich sichtbar sind und tragen Sie die Amplituden der Verläufe ein.

Geg.: l, EI, F

3 (13 Punkte)

Ein starrer Balken (Länge l) mit vernachlässigbarem Gewicht wird bei A über ein Loslager reibungsfrei geführt und trägt an ihrem unteren Ende einen Klotz der Masse M, der auf einer rauhen Unterlage liegt. An dem Balken ist ein Seil befestigt, an dem die Masse m hängt (reibungsfreie Rolle).



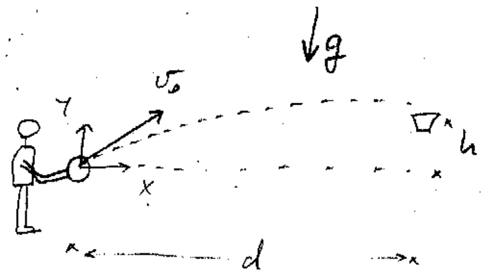
(a) Schneiden Sie zunächst die Massen und den Balken frei und stellen Sie die Gleichgewichtsbeziehungen auf.

(b) Berechnen Sie die Seilkraft, die Lagerkraft in Punkt A und die Reaktionskräfte zwischen Klotz und Balken.

(c) Wie groß muss M mindestens sein, damit das System gerade noch in Ruhe ist? Benutzen Sie dazu COULOMBsche Reibungsgesetz.

Gegeben: l, β, M, m, μ, g

1



e_x: $\ddot{x}(t) = 0$ (1) $\quad$ e_y: $\ddot{y}(t) = -g$ (1)

$\dot{x}(t) = c_1$ $\quad$ $\dot{y}(t) = -gt + c_3$

$x(t) = c_1 t + c_2$ (1) $\quad$ (1) $y(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4$

Anfangsbed. (1) $\begin{cases} x(t=0) = 0 \to c_2 = 0, & y(t=0) = 0 \to c_4 = 0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0\cos(\alpha) \to c_1 = v_0\cos(\alpha), & \dot{y}(t=0) = v_0\sin(\alpha) \to c_3 = v_0\sin(\alpha) \end{cases}$ (2)

(1) $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t \quad , \quad y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0\sin(\alpha)\,t$ (1)

Der Ball trifft den Korb, d.h. $x(t=t_e) = d \quad , \quad y(t=t_e) = h$

hinreichende Bedingung: $x(t_e) = v_0\cos(\alpha)\,t_e = d \Rightarrow t_e = \frac{d}{v_0\cos(\alpha)}$ (1)

ausreichende Bedingung: $y(t_e) = -\frac{g}{2}t_e^2 + v_0\sin(\alpha)\,t_e = h$

$$v_0^2\cos^2(\alpha) = \frac{g/2\, d^2}{d\tan(\alpha) - h} \Longleftarrow h = -\frac{g}{2}\frac{d^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + d\,\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$d_{1,2} = \frac{-\tan(\alpha) \pm \sqrt{\tan^2(\alpha) - 4h\frac{g}{2}\frac{1}{v_0^2\cos^2(\alpha)}}}{-g/v_0^2\cos^2(\alpha)}$$

$$v_0^2 = \frac{gd^2}{2\cos^2(\alpha)(d\tan(\alpha) - h)}$$

$$v_0 = \left(\frac{gd^2/2\cos^2(\alpha)}{(d\tan(\alpha) - h)}\right)^{1/2}$$

(2)

$$\tan^2(\alpha) - \frac{2hg}{v_0^2\cos^2(\alpha)} \geq 0$$

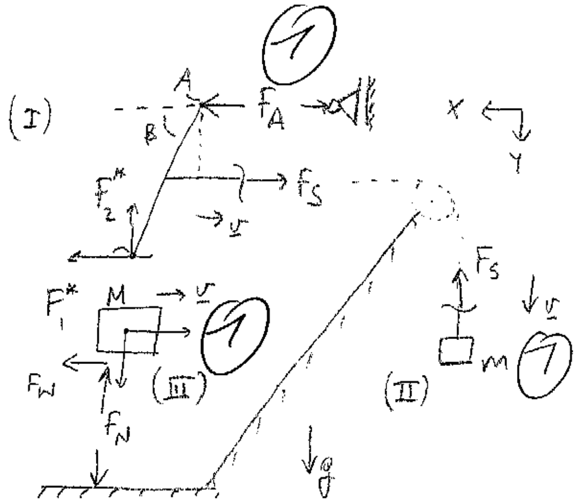
$$v_0^2\sin^2(\alpha) \geq 2hg$$

(2)

$\boxed{\text{oder}}$ $v_0 \in \mathbb{R}$, nur dann, wenn

$$d\tan(\alpha) - h \geq 0$$

3)



(I)

$\Sigma F_x = 0: \quad 0 = F_A + F_1^* - F_S$ (1) 1

$\Sigma F_y = 0: \quad 0 = F_2^*$ (2) 1

$\Sigma M^{(A)} = 0: \quad 0 = \frac{l}{2}\sin(\beta)\, F_S - l\cos(\beta)\, F_2^* -$

$- l\sin(\beta)\, F_1^*$ (3) 1

(2) in (3) $\rightarrow \quad F_1^* = \frac{F_S}{2}$ 1

aus (1) $\rightarrow \quad \underline{F_A = \frac{F_S}{2}}$ 1

Coulomb: $F_W < F_N$

(III) $\quad F_W = \mu F_N$ (5) 1

(II) $\quad \Sigma F_y = 0: \quad 0 = mg - F_S$

$F_S = mg$ (4) 1

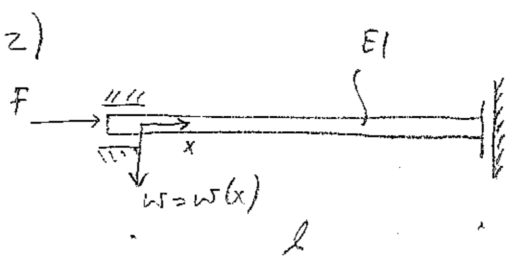
1 $\underline{e}_x: \quad F_1^* - F_W = 0$ (6)

1 $\underline{e}_y: \quad Mg + F_2^* - F_N = 0 \overset{(2),(5)}{\Rightarrow} Mg = \frac{F_W}{\mu} \overset{(6)}{=} \frac{F_1^*}{\mu} = \frac{F_S}{2\mu} = \frac{mg}{2\mu}$

$M = \frac{m}{2\mu}$ 1

---

2)



$w^{(IV)}(x) + \alpha^2 w''(x) = 0$

Ansatz: $w = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\alpha x + D$

$w' = -A\alpha\sin(\alpha x) + B\alpha\cos(\alpha x) + C\alpha$

$w'' = -A\alpha^2\cos(\alpha x) - B\alpha^2\sin(\alpha x)$

$w''' = +A\alpha^3\sin(\alpha x) - B\alpha^3\cos(\alpha x)$

$w^{(IV)} = A\alpha^4\cos(\alpha x) + B\alpha^4\sin(\alpha x)$

Randbedingungen:

$w(x=0) \overset{1}{=} 0 \rightarrow$
$w'(x=0) \overset{1}{=} 0 \rightarrow$
$w'(x=l) \overset{1}{=} 0 \rightarrow$
$w'''(x=l) \overset{1}{=} 0 \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) & 0 & 1 \\ -\alpha\sin(0) & \alpha\cos(0) & \alpha & 0 \\ -\alpha\sin(\alpha l) & \alpha\cos(\alpha l) & \alpha & 0 \\ \alpha^3\sin(\alpha l) & -\alpha^3\cos(\alpha l) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

je 2 Gleichungen $\hat{=}$ 1

$\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ -\alpha\sin(\alpha l) & \alpha\cos(\alpha l) & \alpha & 0 \\ \alpha^3\sin(\alpha l) & -\alpha^3\cos(\alpha l) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$\underline{K}$: Vier Unbekannten aber keine vier linear unabhängige Zeilen, d.h. singulär $\Rightarrow \det[\underline{K}] \overset{!}{=} 0$, ab jetzt $\cos = \cos(\alpha l)$, $\sin = \sin(\alpha l)$

$$+1 \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha\cos & \alpha & 0 \\ -\alpha^3\cos & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} - 0 \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha\sin & \alpha & 0 \\ \alpha^3\sin & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha\sin & \alpha\cos & 0 \\ \alpha^3\sin & -\alpha^3\cos & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ -\alpha\sin & \alpha\cos & \alpha \\ \alpha^3\sin & -\alpha^3\cos & 0 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$-1\left(-\alpha\left(0 - \alpha^4\sin\right) + \alpha\left(\alpha^4\sin\cos - \alpha^4\sin\cos\right)\right) = 0$$

$$-\alpha^5\sin(\alpha l) = 0 \quad 2$$

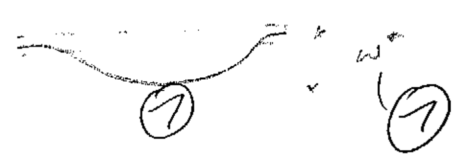
$$\alpha = \frac{\pi k}{l} \, , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \in \mathbb{Z}^+$$

$\alpha^2 = \dfrac{F}{EI}$, $F = \alpha^2 EI$

1\. Eigenform , $F = \dfrac{\pi^2 1^2}{l^2} EI$ 2

2\. Eigenform , $F = \dfrac{\pi^2 4}{l^2} EI$

$$w(x) = w^*\left(\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) - 1\right)$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\pi}{l} & \frac{\pi}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{l} & \frac{\pi}{l} & 0 \\ 0 & \frac{\pi^3}{l^3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B = 0$, $C = 0$, $A = -D = w^*$

$$w(x) = w^*\left(\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) - 1\right)$$