Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2. Klausur Kinematik und Dynamik SS 2012

Name, Vorname:

Matr.-Nr.: Musterlösung

Studiengang:

○ Studienbegleitende Prüfung (Bachelor)
○ Übungsscheinklausur (ohne Theorieteil)

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

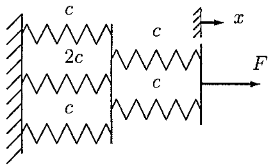
Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m , s und N an:

Leistung $\dim[P] =$ J/s = Nm/s	Verstärkungsfunktion $\dim[V] =$ 1
Kinetische Energie $\dim[E^{\text{kin.}}] =$ J = Nm = $\frac{kg\,m^2}{s^2}$	Kraftstoß $\dim[K] =$ kg m/s

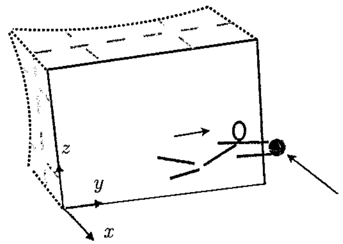
(2 Punkte)

2. Berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeit c_{ers} für das dargestellte System von Federn.



$c_{ers} = \frac{4}{3} c$

(1 Punkt)

3. 

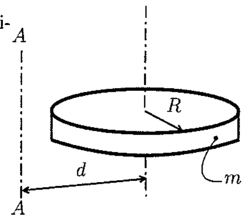
Der Torwart Neuer springt mit einer Geschwindigkeit 8,05 km/h in die y-Richtung und fängt den mit 80,5 km/h direkt ins Tor geschossenen Ball, also in die $-x$-Richtung. Somit absorbiert er die ganze Energie, d.h. voll plastischer Stoß mit der Stoßzahl $e = 0$. Wie groß ist seine Geschwindigkeit $\underline{v}$ mit dem Ball in der Hand, nach dem Stoß, im gezeichneten Koordinatensystem?
Geg.: $m_{\text{Neuer}} = 80$ kg , $m_{\text{Ball}} = 500$ g

$\underline{v} = -0{,}5\, \underline{e}_x + 8\, \underline{e}_y$

(1 Punkt)

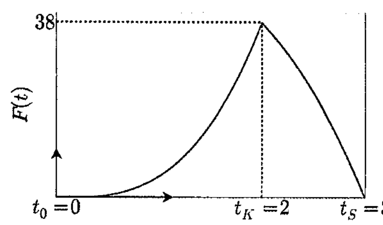
4. Geben Sie das Massenträgheitsmoment der skizzierten starren Scheibe um die $A - A$ Achse an (**Geg.:** R, m, d).

$\Theta^{A-A} = \frac{1}{2} m R^2 + m d^2$



(1 Punkt)

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5. 

Bei einem Stoßvorgang wurde die Kontaktkraft $F(t)$ wurde über die Zeit gemessen und gefittet. Berechnen Sie die dazugehörige Stoßzahl e.

$$F(t) = \begin{cases} \frac{19}{4}t^3 & : t \in [0,2] \\ -2t^3 + 54 & : t \in [2,3] \end{cases}$$

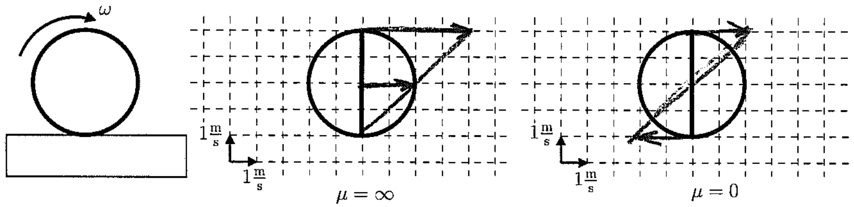
$e = \frac{43.5}{19.8}$

(1 Punkt)

6. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\underline{v}^B$ am Punkt B eines starren Körpers, welcher um den mit der Geschwindigkeit $\underline{v}^A$ sich bewegenden Punkt A mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ rotiert. Der Ortsvektor von A nach B, $\underline{x}^{AB}$, ist im kartesischen Koordinatensystem gegeben.
Geg.: $\underline{v}^A = 2\underline{e}_x + 6\underline{e}_z$, $\underline{\omega} = 4\underline{e}_x + 1\underline{e}_y$, $\underline{x}^{AB} = 8\underline{e}_x - 3\underline{e}_z$

$\underline{v}^B = -1\, \underline{e}_x + 12\, \underline{e}_y - 2\, \underline{e}_z$

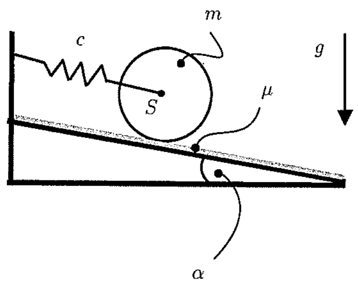
(1 Punkt)

7. 

Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsprofile des Rades entlang der vertikalen Mittellinie für den Fall des reinen Rollens, also wenn es auf der Unterlage abrollt, $\mu = \infty$, und für den Fall des Schlupfes, also wenn es ohne Reibung durchdreht, $\mu = 0$. In beiden Fällen rotiert das Rad vom Radius $r = 2$ m mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1/s$ auf der Unterlage.

(1 Punkt)

8. Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz ω von dem skizzierten System ohne Reibung $\mu = 0$ und beim reinen Rollen, d.h. mit genügend großer Reibung μ, durch das COULOMBsche Gesetz.

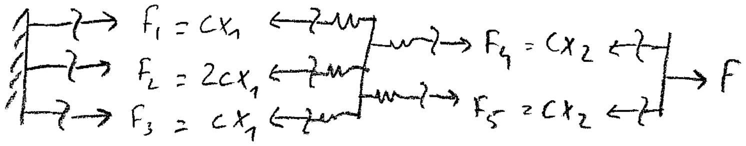


$\omega|_{\mu=0} = \sqrt{\frac{c}{m}}$ $\quad \omega|_{\mu} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{c}{m}}$

(2 Punkte)

Theorieteil:

(2)



$$4 c x_1 = 2c x_2 \quad , \quad F = 2c x_2 \quad , \quad x_1 + x_2 = x \quad , \quad F = c_{ers} x$$

$$\left(\frac{F}{4c} + \frac{F}{2c} \right) c_{ers} = F$$

$$c_{ers} = \frac{8c^2}{6c} = \frac{4}{3} c$$

(3)

$$m_{Neuer} \underline{v}_{Neuer} + m_{Ball} \underline{v}_{Ball} = (m_{Neuer} + m_{Ball}) \underline{v}$$

$$80 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8{,}05 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} -80{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (80 + 0{,}5) \underline{v}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -80{,}5 \cdot 0{,}5 / 80{,}5 \\ 80 \cdot 8{,}05 / 80{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5)

$$e = \frac{K^R}{K^K} = \frac{\int_2^3 (-2t^3 + 54)\, dt}{\int_0^2 \frac{19}{4} t^4 \, dt} = \frac{-2 \frac{t^4}{4} + 54t \Big|_2^3}{\frac{19}{4} \frac{t^5}{5} \Big|_0^2} = \frac{-2 \frac{3^4 - 2^4}{4} + 54(3-2)}{\frac{19}{4} \frac{2^5}{5}} =$$

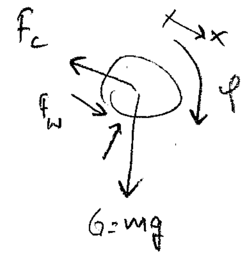
$$= \frac{-\frac{65}{2} + 54}{\frac{19 \cdot 8}{5}} = \frac{+43 \cdot 5}{19 \cdot 8}$$

(6)

$$\underline{v}^B = \underline{v}^A + \underline{\omega} \times \underline{x}^{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ +12 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(8)

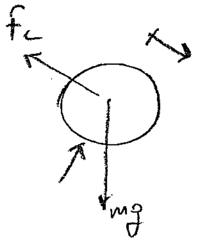


$$m\ddot{x} = -F_c + F_w - G_x = -cx + F_w - mg\cos(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Theta\ddot{\varphi} = -F_w r \\ r\ddot{\varphi} = \ddot{x} \end{array}\right\} \quad \Theta\ddot{x} = -F_w r^2$$

$$(mr^2 + \Theta)\ddot{x} + cr^2 x = \dots$$

$$\omega^2 = \frac{cr^2}{mr^2 + \Theta}, \quad \omega\Big|_{\mu} = \sqrt{\frac{cr^2}{mr^2 + \underbrace{\Theta}_{\frac{1}{2}mr^2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{c}{m}}$$



$$m\ddot{x} = -F_c - mg\cos(\alpha)$$

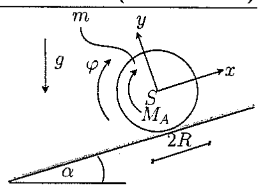
$$m\ddot{x} + cx = \dots$$

$$\omega\Big|_{\mu=0} = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

1 (12 Punkte)

Eine durch ein Antriebsmoment M_A angetriebene Rolle (Radius R, Masse m) bewegt sich auf einer schiefen Ebene. Zwischen der Rolle und der Ebene soll Reibung herrschen.



(a) Fertigen Sie zunächst einen Freischnitt des Systems an.

(b) Stellen Sie nun den Drallsatz um S und den Impulssatz in S für das System auf.

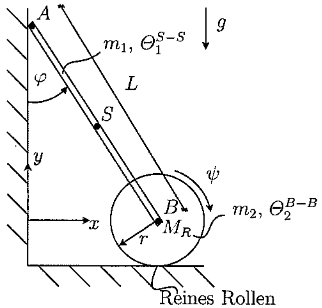
(c) Finden sie eine kinematische Beziehung für den Fall reines Rollens zwischen $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{x}$. Bestimmen Sie nun durch Kombination von Drallsatz und Impulssatz $\ddot{x}$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Wie groß muss das Antriebsmoment M_A sein, damit die Rolle auf der Ebene steht (weder nach unten noch nach oben abrollt)?

(d) Bestimmen Sie die auf der Ebene in Normalenrichtung wirkende Reaktionskraft zwischen Rad und Ebene. Benutzen Sie nun das COULOMBsche Reibungsgesetz. Wie groß muss der Reibkoeffizient μ in Abhängigkeit der gegebenen Größen mindestens sein, damit reines Rollen herrscht? Geben Sie das für reines Rollen benötigte μ explizit für Steigungen von $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$ an.

Geg.: m, R, g, α, M_A

2 (13 Punkte)

Die mit dem Mittelpunkt eines Rades verbundene Stange m_1 beginnt aus der Ruhelage (Lage 0 mit den Anfangsbedingungen: $\varphi(0) = \pi/6, \dot{\varphi}(0) = 0, \psi(0) = 0$) mit der Einwirkung der Erdschwere ohne Reibung an der linken Wand zu gleiten. Zwischen der Stange und dem Rad m_2 wirkt das konstante Reibmoment M_R. Bestimmen Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und die Geschwindigkeit des Punktes A, $\underline{v}_A$ zu dem Zeitpunkt, an dem die Stange genau waagerecht ist (Lage 1 und $\varphi(1) = \pi/2$). Dabei soll angenommen werden, dass der Punkt A mit der Wand in Kontakt bleibt.



(a) Machen Sie einen Freischnitt mit sinnvollen Richtungen für die Winkel φ und ψ. Benutzen Sie den Arbeitssatz der Form: $E_1^{\text{kin}} + E_1^{\text{pot}} - E_0^{\text{kin}} - E_0^{\text{pot}} = W$. Stellen sie nun E_1^{kin}, E_1^{pot}, E_0^{kin} und E_0^{pot} auf, in Bezug auf das gezeichnete Koordinatensystem (d.h. Nullniveau ist in $y = 0$).

(b) Berechnen Sie die von dem Reibmoment M_R geleistete Arbeit W. Achten Sie auf die unterschiedlichen Richtungen der φ und ψ.

(c) Schreiben Sie die Koordinaten y_A, x_B, x_S, y_S in φ und somit finden Sie die kinematischen Beziehungen zwischen φ und v_A, φ und v_B und φ und $\underline{v}_S$. Finden Sie weiterhin eine kinematische Beziehung zwischen $\dot{\psi}$ und v_B unter der Annahme des reinen Rollens. Mit der Letzeren berechnen Sie ψ in Abhängigkeit von φ durch die gegebenen Anfangsbedingungen.

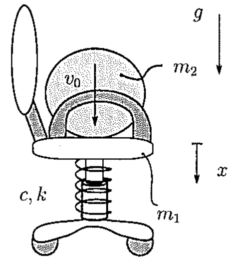
(d) Stellen Sie nun den Arbeitssatz nach φ auf. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Lage 1, $\dot{\varphi}_1$, sowie die Geschwindigkeit des Punktes A, v_A.

Geg.: r, L, g, m_1, $\Theta_1^{S-S} = \frac{1}{12} m_1 L^2$, m_2, $\Theta_2^{B-B} = \frac{1}{2} m_2 r^2$, $M_R = \text{konst.}$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 (15 Punkte)

Ein neuer Bürostuhl wird auf sein Schwingverhalten untersucht. Der Sitz (Masse m_1) ist auf einem parallel geschalteten Feder-Dämpfer-System (Federkonstante c, geschwindigkeitsproportionale Dämpferkonstante k) gelagert. Die Masse des Feder-Dämpfer-Systems ist im Vergleich zum Sitz vernachlässigbar. Zu Testzwecken wird eine Masse m_2 auf den Stuhl fallen gelassen, sodass dem System mit der Gesamtmasse $(m_1 + m_2)$ eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 zugeteilt wird.



(a) Schneiden Sie das System im Erdschwerefeld frei und ermitteln Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für x.

(b) Geben Sie die statische Ruhelage x_{stat}, den Abklingkoeffizienten δ und die Eigenkreisfrequenz ω des Systems an. Von nun an kann die Berechnung mit δ, ω ausgeführt werden.

(c) Formulieren Sie eine Differentialgleichung in $\tilde{x}$, wobei $x = x_{\text{stat}} + \tilde{x}$ ist.

(d) Benutzen Sie den Ansatz:

$$\tilde{x} = A \exp(\lambda t)$$

und lösen Sie die charakteristische Gleichung für λ. Wie lautet die Bedingung für schwache Dämpfung (Schwingfall)? Wie groß sind die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_d und die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ für das schwach gedämpfte System? Ab jetzt kann mit ω_d gerechnet werden.

(e) Formulieren Sie die Systemantwort (Lösung, $x(t)$) unter Beachtung der EULERschen Identität:

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

und passen Sie diese an die Anfangsbedingungen an. Schreiben Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ in gegebenen Größen und in δ, ω_d.

(f) In einem weiteren Test wird der Stuhl durch eine äußere Kraft $F(t)$ zum Schwingen angeregt, so dass die Bewegungsdifferentialgleichung nun:

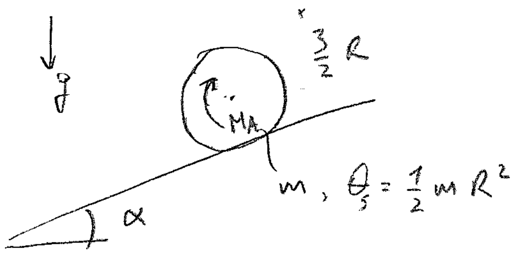
$$\ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega^2 \tilde{x} = \frac{\hat{F}}{m} \cos(\Omega t)$$

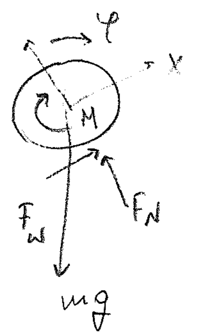
lautet. Wählen Sie den Ansatz $\tilde{x}_p = \hat{x} \cos(\Omega t - \phi)$ für die partikuläre Lösung und finden Sie dadurch zwei Gleichungen für $\hat{x}$ und ϕ. Berechnen Sie die verallgemeinerte Lösung $x(t)$ für die Anfachung in gegebenen Größen und in δ, ω, ω_d.

Geg.: $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, k, c, g, $\hat{F}$, Ω, v_0

1)

a)





$\boxed{1}$

b)

$\Theta_R^S = \frac{1}{2} m R^2$ $\boxed{1}$

$$\Theta_R^S \ \ddot{\varphi} = M_A - F_W R \quad \boxed{1}$$

$$m \ \ddot{x} = -mg\sin(\alpha) + F_W \quad \boxed{1}$$

c)

$R\,d\varphi = dx$, $\ddot{y} = 0$, $0 = F_N - mg\cos(\alpha)$

$R\ddot{\varphi} = \ddot{x}$ $\boxed{1}$

$$\frac{1}{2} m R^2 \ \frac{\ddot{x}}{R} = M_A - R\left(mg\sin(\alpha) + m\ddot{x} \right)$$

$$\ddot{x} = \frac{2}{3mR} \left(M_A - mgR\sin(\alpha) \right) \quad \boxed{1}$$

zum Stehen: $M_A = mgR\sin(\alpha)$ $\boxed{1}$

d)

$\boxed{1}$

$$F_W = \mu F_N = \mu\, mg\cos(\alpha)$$

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\alpha) + \mu\, mg\cos(\alpha) \quad \boxed{1}$$

$$\mu = \frac{\ddot{x} + g\sin(\alpha)}{g\cos(\alpha)} = \frac{\frac{2}{3}M_A - \frac{2}{3}mgR\sin(\alpha) + mgR\sin(\alpha)}{mgR\cos(\alpha)} =$$

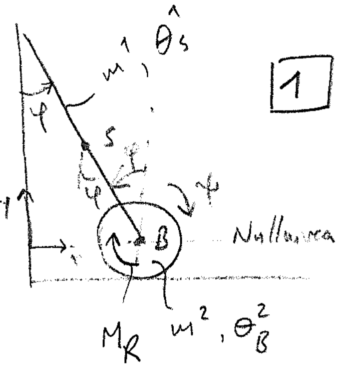
$$\mu = \frac{2M_A + mgR\sin(\alpha)}{3mgR\cos(\alpha)} \quad \boxed{1}$$

, $\alpha = 0° \Rightarrow \mu = \frac{2M_A}{3mgR}$ $\boxed{1}$

$\alpha = 90° \Rightarrow \mu = \infty$ $\boxed{1}$

$\boxed{\Sigma\ 12}$

2) a)



$\boxed{1}$

$$E_0^{kin} = 0 \quad , \quad E_0^{pot} = \frac{L\cos(\varphi_0)}{2} m^1 g = \frac{\sqrt{3}}{4} L m^1 g \quad \boxed{1}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$E_1^{kin} = \frac{1}{2} m^1 \left(\underline{v}_{S,1}\right)^2 + \frac{1}{2} \theta_S^1 \left(\dot{\varphi}_{S,1}\right)^2 + $$
$$+ \frac{1}{2} m^2 \left(v_{B,1}\right)^2 + \frac{1}{2} \theta_B^2 \left(\dot{\psi}_{B,1}\right)^2 \quad \boxed{1}$$

$$E_1^{pot} = 0$$

b) $$W = -\int_{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}}^{\pi/2} M_R \, d\varphi - \int_{\psi_0 = 0}^{\psi} M_R \, d\psi = -M_R\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \psi - 0\right) = -M_R\left(\frac{\pi}{3} + \psi\right) \quad \boxed{1}$$

$\boxed{\text{oder}}$ $\psi_0 = \frac{L}{r}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

c) $$v_A = \left(L\cos(\varphi)\right)^{\cdot} = -L\dot{\varphi}\sin(\varphi) \quad \boxed{1} \quad , \quad \underline{v}_S = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{2}\sin(\varphi)\right)^{\cdot} \\ \left(\frac{L}{2}\cos(\varphi)\right)^{\cdot} \end{bmatrix} = \frac{L}{2}\dot{\varphi} \begin{bmatrix} +\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad \boxed{1} \; \boxed{1}$$

$$v_B = \left(L\sin(\varphi)\right)^{\cdot} = L\dot{\varphi}\cos(\varphi) \quad \boxed{1}$$

Reines Rollen: $r \, d\psi = dx_B$

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \psi(0) = 0 \quad \boxed{1}$$

$$r\dot{\psi} = v_B \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{L}{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi) \quad , \quad \psi = \frac{L}{r}\sin(\varphi) - \frac{L}{r}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$\boxed{1}$

$\boxed{\text{oder}}$ $\psi(0) = \frac{L}{r}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \psi = \frac{L}{r}\sin(\varphi)$

d) $$\frac{1}{2} m^1 \frac{L^2}{4}(\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m^1 (L)^2 (\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} m^2 (L)^2 (\dot{\varphi}_1)^2 \cos^2(\varphi_1) + \frac{1}{2} m^2 (r)^2 \left(\frac{L}{r}\dot{\varphi}_1\right)^2 \cos^2(\varphi_1) -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{4} L m^1 g = -M_R\left(\frac{\pi}{3} + \psi_1\right) \quad \boxed{1}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \psi_1 = \frac{L}{r}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right), \quad \cos(\varphi_1) = 0$$

$$\dot{\varphi}_1^2 L^2 \left(\frac{m^1}{8} + \frac{m^1}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} L m^1 g - M_R \frac{\pi}{3} - M_R \frac{L}{2r}$$

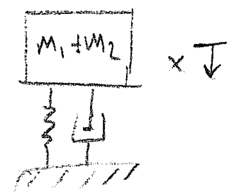
$$\dot{\varphi}_1 = \frac{6}{m^1 L}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} m^1 g - \frac{M_R}{L}\frac{\pi}{3} - \frac{M_R}{2r}\right) \quad \boxed{1}$$

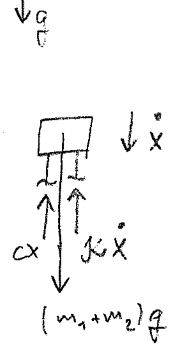
$$v_A = -L\dot{\varphi}_1 \quad \boxed{1}$$

$\boxed{\Sigma \; 13}$

3)

a)





$$(m_1+m_2)\,\ddot{x} = -cx - \mathcal{K}\dot{x} + (m_1+m_2)g$$

$$m_1 = m \;,\quad m_2 = 3m \qquad \boxed{1}$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\mathcal{K}}{4m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{4m}}_{\omega^2}x = g \qquad \boxed{1}$$

b) $\dot{x}_{stat} = 0 \;,\quad \ddot{x}_{stat} = 0$

$$x_{stat} = \frac{4mg}{c} \qquad \boxed{1}$$

c) $x = x_{stat} + \tilde{x} \implies \ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega^2\tilde{x} = 0 \qquad \boxed{1}$

d) Ansatz: $\tilde{x} = A\exp(\lambda t)$, $\underbrace{(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2)}_{=0\;:\;\text{charakteristische Glg.}} A\exp(\lambda t) = 0 \qquad \boxed{1}$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\underbrace{\delta^2-\omega^2}_{<0\;:\;\text{schwach gedämpft}}} \qquad \boxed{1}$$

$$= -\delta \pm i\sqrt{\omega^2-\delta^2} \;,\quad \omega_d^2 = \omega^2-\delta^2$$

e) $\tilde{x} = A_1\exp(-\delta t + i\omega_d t) + A_2\exp(-\delta t - i\omega_d t)$

$$= \exp(-\delta t)\Big((A_1+A_2)\cos(\omega_d t) + i(A_1-A_2)\sin(\omega_d t)\Big) \qquad \boxed{1}$$

$$x = x_{stat} + \tilde{x} = \frac{4mg}{c} + \tilde{x} \;,\quad x(t=0) = 0 \implies A_1+A_2 = -\frac{4mg}{c} \qquad \boxed{1}$$

$$\dot{x} = \exp(-\delta t)\Big(\big(-\delta(A_1+A_2) + i\omega_d(A_1-A_2)\big)\cos(\omega_d t) + \big(-\delta i(A_1-A_2) - \omega_d(A_1+A_2)\big)\cdot\sin(\omega_d t)\Big)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = +\delta\frac{4mg}{c} + i\omega_d(A_1-A_2) \implies i(A_1-A_2) = \frac{v_0}{\omega_d} - \frac{\delta\, 4mg}{\omega_d c} \qquad \boxed{1}$$

$$x(t) = \left(-\frac{4mg}{c}\cos(\omega_d t) + \left(\frac{v_0}{\omega_d} - \frac{4\delta mg}{\omega_d c}\right)\sin(\omega_d t)\right)\exp(-\delta t) + \frac{4mg}{c} \qquad \boxed{1}$$

f) $\ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega^2\tilde{x} = \frac{\hat{F}}{m}\cos(\Omega t)$

Ansatz:
$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}_p &= \hat{x}\cos(\Omega t - \phi) = \hat{x}\cos(\Omega t)\cos(\phi) + \hat{x}\sin(\Omega t)\sin(\phi)\\ \dot{\tilde{x}}_p &= -\Omega\hat{x}\sin(\Omega t)\cos(\phi) + \Omega\hat{x}\cos(\Omega t)\sin(\phi)\\ \ddot{\tilde{x}}_p &= -\Omega^2\hat{x}\cos(\Omega t)\cos(\phi) - \Omega^2\hat{x}\sin(\Omega t)\sin(\phi)\end{aligned}\right\} \boxed{1}$$

$$\left(-\Omega^2\hat{x}\cos(\phi) + 2\delta\Omega\hat{x}\sin(\phi) + \omega^2\hat{x}\cos(\phi) - \frac{\hat{F}}{m}\right)\cos(\Omega t) +$$
$$+\left(-\Omega^2\hat{x}\sin(\phi) - 2\delta\Omega\hat{x}\cos(\phi) + \omega^2\hat{x}\sin(\phi)\right)\sin(\Omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\phi)\left(-\Omega^2\hat{x} + \omega^2\hat{x}\right) = \cos(\phi)\, 2\delta\Omega\hat{x} \qquad (1)$$
$$\phi = \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \qquad \boxed{1}$$

$$\hat{x}\left((\omega^2 - \Omega^2)\cos(\phi) + 2\delta\Omega\sin(\phi)\right) = \frac{\hat{F}}{m} \qquad \Big| \; \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} \text{ und } (1)$$

$$\hat{x}\left((\omega^2 - \Omega^2)\frac{\cos^2(\phi)}{\sin(\phi)} + (\omega^2 - \Omega^2)\sin(\phi)\right) = \frac{\hat{F}}{m}\cot(\phi)$$

$$\hat{x} = \frac{\sin(\phi)}{\omega^2 - \Omega^2}\frac{\hat{F}}{m}\frac{\omega^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega} \; \boxed{1}, \qquad \frac{1}{\sin^2(\phi)} = \frac{\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)}{\sin^2(\phi)} = 1 + \left(\frac{\omega^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega}\right)^2 \; \boxed{1}$$

$$= \frac{\hat{F}}{m\sqrt{4\delta^2\Omega^2\left(1 + \left(\frac{\omega^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega}\right)^2\right)}} = \frac{\hat{F}/m}{\sqrt{4\delta^2\Omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}}$$

$$x(t) = \left(\left((A_1^* + A_2^*)\cos(\omega_d t) + i(A_1^* - A_2^*)\sin(\omega_d t)\right)\exp(-\delta t) + \frac{4mg}{c} +\right.$$
(falls hier $A_1^* = A_1$, $A_2^* = A_2$ ist auch o.k.) $\boxed{1}$
$$\left. + \frac{\hat{F}}{m}\left(4\delta^2\Omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2\right)^{-1/2}\cos\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right)\right)\right),$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}, \quad \omega^2 = \frac{c}{4m}, \quad \delta = \frac{k}{8m}$$

$\boxed{\Sigma\ 15}$