Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

LKM

Kinematik und Dynamik SS 2010, 2. Klausur, 21.07.2010

Bitte deutlich in DRUCKSCHRIFT schreiben!

Name, Vorname: Musterlösung

Matr.-Nr.:

Studiengang:

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Bitte ankreuzen!

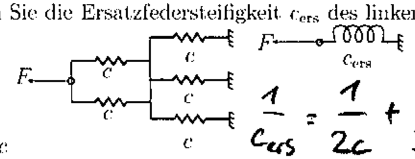
○ Studienbegleitende Prüfung ○ Übungsscheinklausur

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten in Vielfachen von [kg , m , s] der Eigenfrequenz ω und des Massenträgheitsmomentes Θ_{AA} an. **1 Punkt**

$\dim[\omega] = 1/s$, $\dim[\Theta_{AA}] = kg\,m^2$

2. Geben Sie die Ersatzfedersteifigkeit c_{ers} des linken Systems an.



Geg.: c

$$\frac{1}{c_{ers}} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{3c} = \frac{5}{6c}\ , \quad c_{ers} = \frac{6}{5}c$$

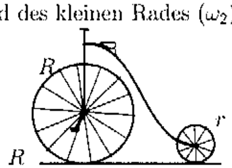
1 Punkt

3. Welche Aussagen sind bei harmonischen, periodischen Schwingungen zutreffend? t: die Zeit, T: die Periodendauer, ω: die Eigenkreisfrequenz.

[X] $x(t) = x(t+T)$ [ ] $x(t) = \arctan(\omega t)$ [X] $x(t) = A\exp(i\omega t) + B\exp(-i\omega t)$

1 Punkt

4. Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit des großen Rades (ω_1) und des kleinen Rades (ω_2) bei reinem Rollen in beiden Rädern an.



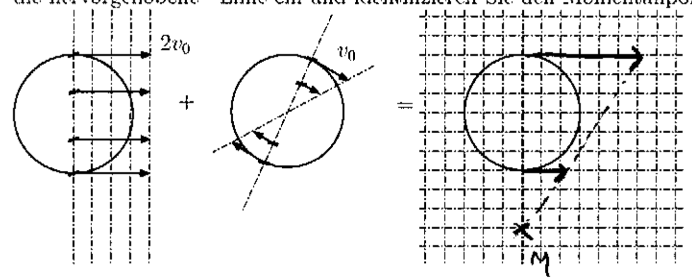
$$\omega_1 R = \omega_2 r$$

Geg.: r, R **1 Punkt**

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

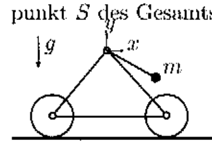
LKM

5. Eine Rollbewegung ist als Überlagerung einer Translation (erstes Bild) und einer Rotation (zweites Bild) darstellbar. Zeichnen Sie in dem rechten Schaubild die Gesamtbewegung über die hervorgehobene Linie ein und identifizieren Sie den Momentanpol.



1 Punkt

6. An einem Wagen ist ein ausgelenktes Pendel angebracht. Welche Aussage gilt für den Schwerpunkt S des Gesamtsystems, wenn das Pendel losgelassen wird?



[ ] Der Schwerpunkt fängt an sich nach rechts zu bewegen.
[ ] Der Schwerpunkt fängt an sich nach links zu bewegen.
[X] Der Schwerpunkt bewegt sich weder nach rechts noch nach links.

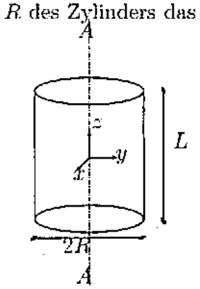
1 Punkt

7. Wir schreiben den Arbeitssatz in der Form $E^{kin}(t_E) - E^{kin}(t_A) = W$. Welche Aussagen sind richtig für W?

[X] $W = \int_{t_A}^{t_E} \underline{F}\cdot\underline{v}\,dt$ [ ] $W = \int_{x(t_A)}^{x(t_E)} \underline{F}\times d\underline{x}$ [X] $W = \int_{x(t_A)}^{x(t_E)} \underline{F}\cdot d\underline{x}$

1 Punkt

8. Berechnen Sie per Integration über $\Theta_{AA} = \rho L \iint_A r^2 dA$ und unter Verwendung von Zylinderkoordinaten in Abhängigkeit von der Dichte ρ, Länge L und dem Radius R des Zylinders das Massenträgheitsmoment Θ_{AA} .

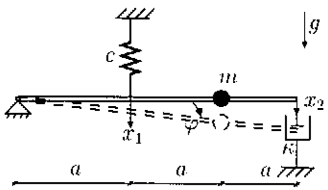


$$\Theta_{AA} = \rho L \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\, r\,d\varphi\, dr = \rho L \int_0^R r^3 \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr =$$

$$= \rho L \int_0^R 2\pi r^3\, dr = \rho L\, 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=R} =$$

1 Punkt

$$\Theta_{AA} = \rho L \frac{\pi}{2} R^4$$

9. 

Gegeben ist die DGL eines schwingfähigen Systems:

$$-m(2a)^2\ddot{\varphi} = cx_1a + \kappa\dot{x}_2 3a - mg2a$$

Geben Sie die statische Ruhelage $x_{1,stat}$ an.

$$x_{1,stat} = \frac{mg2a}{ca} = \frac{m}{c}2g$$

1 Punkt

10. Geben Sie zu Theorieaufgabe 9 die kinematischen Beziehungen zwischen φ, x_1 und x_2 an.

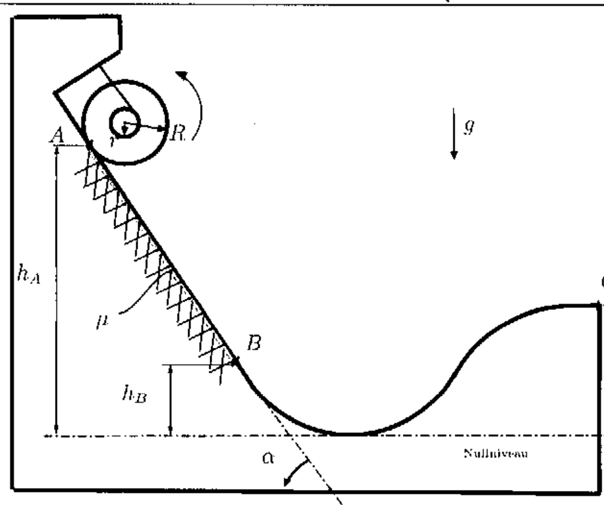
$$\varphi a = x_1 \ , \quad \varphi 3a = x_2$$

1 Punkt

Rechenteil

1 **(13 Punkte)**

Eine Rolle mit der Masse m, dem Massenträgheitsmoment Θ^S und dem Außenradius R wird in der skizzierten Lage auf der Laufbahn im Punkt A festgehalten. Auf dem Innenradius r der Rolle ist ein Seil mit n Windungen aufgewickelt. Die Rolle wird losgelassen und dreht sich über das aufgewickelte Seil entlang der reibungsbehafteten Bahn bis zur Lage B ab. In B ist das Seil vollständig abgewickelt und löst sich von der Rolle, die sich auf der Bahn (ab B reibungsfrei) weiter bis C bewegt.



(a) Berechnen Sie die Bewegungsgrößen v_B und ω_B der Rolle im Punkt B. Beachten Sie den eingezeichneten Drehsinn von ω. Benutzen Sie dazu einen Freischnitt zwischen der Strecke $A-B$, die COULOMB-Beziehung und den Arbeitssatz.

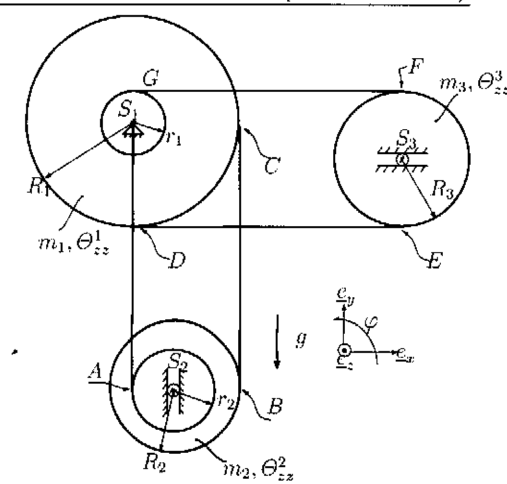
(b) Berechnen Sie nun die Bewegungsgrößen v_C und ω_C der Rolle im Punkt C. Benutzen Sie dazu den Energie- und den Drallsatz.

Geg.: m, g, R, $r = \frac{1}{2}R$, $\alpha = 60°$, $\Theta^S = \frac{1}{2}mR^2$, $n = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$, μ, $h_A = \frac{15}{2}R$, $h_C = 2R$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2 **(14 Punkte)**

Drei Riemenscheiben mit den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 sind über zwei aufgerollte nicht dehnbare Seile miteinander verbunden (s. rechts die Skizze). Die Seile laufen ohne Schlupf (reines Rollen in den gezeichneten Kontaktpunkten A, B, C, D, E, F) und ihre Abschnitte zwischen den Riemenscheiben sind genau parallel. Der Schwerpunkt S_2 der unteren Scheibe ist vertikal geführt. Der Schwerpunkt S_3 der rechten Scheibe ist horizontal geführt.



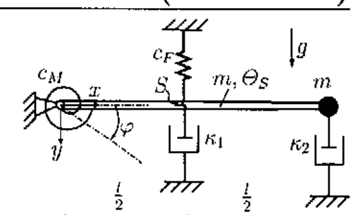
(a) Fertigen Sie jeweils einen vollständigen Freischnitt der 3 Rollen an und stellen Sie sowohl den Drall- als auch den Schwerpunktsatz in x- und y-Richtung für die Rollen auf. Zählen Sie alle Unbekannten Größen Ihrer gefundenen Gleichungen auf. Wieviele kinematische Beziehungen sind nötig, um das Gleichungssystem lösen zu können?

(b) Stellen Sie alle kinematischen Beziehungen auf. Verwenden Sie dazu ausschließlich die Geschwindigkeitsgleichung in ihrer vektoriellen Form: $\underline{v}^P = \underline{v}^Q + \underline{\omega} \times \underline{x}^{QP}$ Stellen Sie dazu die benötigten Geschwindigkeits-, Winkelgeschwindigkeits- und Abstandsvektoren auf und werten Sie die Gleichungen aus.

Geg.: R, r, m_1, Θ^1_{zz}, Θ^2_{zz}, Θ^3_{zz}, m_2, g

3 **(13 Punkte)**

Ein massebehafteter Stab mit einer Punktmasse am Ende schwingt unter dem Einfluss der Schwerkraft (rechts zu sehen ist die Lage vor Einwirkung der Gravitation). Links ist eine lineare Drehfeder mit der Konstante c_M angebracht. In der Mitte ist ein Feder-Dämpfersystem (Federsteifigkeit c_F, Dämpferkonstante κ_1) angebracht. Beide Federn sind bei $\varphi = 0$ entspannt.



(a) Machen Sie einen Freischnitt für die ausgelenkte Lage und stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung in φ auf. Führen Sie dabei noch keine Linearisierung für kleine Winkel φ durch. Linearisieren Sie nun die BewegungsDGL für kleine Winkel φ.

(b) Bestimmen Sie die statische Ruhelage und transformieren Sie ihre Schwingungsdifferentialgleichung auf $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_{\text{stat}}$.

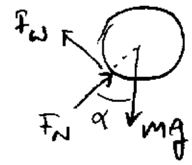
(c) Geben Sie für den Fall schwacher Dämpfung die Eigenkreisfrequenz der freien gedämpften Schwingung und den Abklingkoeffizienten δ und den Zusammenhang zwischen $\kappa_1, \kappa_2, c_T, c_F$ an!

Geg.: g, m, l, $\Theta_S = \frac{1}{12}ml^2$, κ_1, κ_2, c_F, c_M

Musterlösung 2. Klausur Kinematik & Dynamik SS 2010

$\boxed{1}$

a) $E_{ges}^{B} - E_{ges}^{A} = W = \int_A^B \underline{F}_W \cdot d\underline{s}$



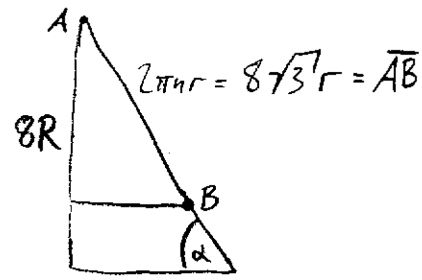
$F_W = \mu F_N = \mu m g \cos\alpha$

$$\underbrace{mg\,2R}_{1} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m v_B^2 + \tfrac{1}{2}\Theta \omega_B^2}_{1} \underbrace{- mg\,8R}_{1} = -\mu m g \cos\alpha\,(\overline{AB} + 2\pi n R) \quad 1$$

$$= -\mu m g \tfrac{1}{2}\, 2\pi \tfrac{4\sqrt{3}}{\pi}(r+R) \quad 1$$

mit $v_B = r\omega_B$ 1

$r = \frac{R}{2}$



$8R - 8\sqrt{3}\, r \underbrace{\sin\alpha}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$\Rightarrow v_B = 2\sqrt{gR - \mu g \sqrt{3}\, R}$ 1

$\omega_B = 4\sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\mu g}{R}\sqrt{3}}$ 1

b) $\Theta\dot{\omega} = 0$ 1

keine äußeren Momente die angreifen

$\Rightarrow \omega = const.$

$\Rightarrow \omega_C = \omega_B = 4\sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\mu g}{R}\sqrt{3}}$ 1

Energiesatz B – C:

$E_{ges}^{B} = E_{ges}^{C}$

$$\overbrace{\tfrac{1}{2} m v_B^2 + \tfrac{1}{2}\Theta\omega_B^2 + mg\,2R = \tfrac{1}{2} m v_C^2 + \tfrac{1}{2}\Theta\omega_C^2}^{1} + \underbrace{mg\,3R}_{1}$$

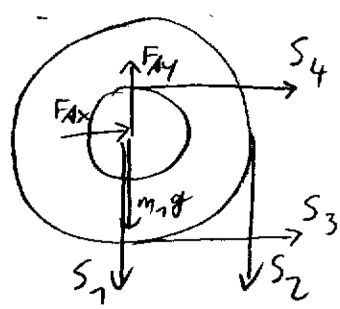
$v_C^2 = v_B^2 - 2gR$

$= 4gR - 4\mu g\sqrt{3}\,R - 2gR$

$v_C = \sqrt{2gR - 4\mu g\sqrt{3}\,R}$ 1

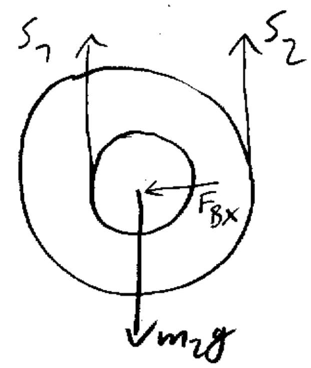
2 a)

1.



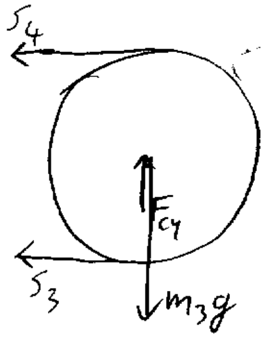
$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_{Ax} + S_4 + S_3 \\ m_1 \ddot{y}_1 &= F_{Ay} - S_1 - S_2 - m_1 g \\ \Theta_{zz}^1 \ddot{\varphi}_1 &= S_3 R_1 - S_4 r_1 - S_2 R_1 \end{aligned}\right\} \; 1$$

2.



$$\left.\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= - F_{Bx} \\ m_2 \ddot{y}_2 &= S_1 + S_2 - m_2 g \\ \Theta_{zz}^2 \ddot{\varphi}_2 &= S_2 R_2 - S_1 r_2 \end{aligned}\right\} \; 1$$

3.



$$\left.\begin{aligned} m_3 \ddot{x}_3 &= - S_4 - S_3 \\ m_3 \ddot{y}_3 &= F_{Cy} - m_3 g \\ \Theta_{zz}^3 \ddot{\varphi}_3 &= - S_4 R_3 + S_3 R_3 \end{aligned}\right\} \; 1$$

Unbekannte: $x_1, F_{Ax}, S_4, S_3, y_1, F_{Ay}, S_1, S_2, \varphi_1, x_2, F_{Bx}, y_2$
[Aufzählung 1] $\varphi_2, x_3, y_3, F_{Cy}, \varphi_3 \Rightarrow$ 17 Unbekannte
9 Gleichungen
$\Rightarrow$ 8 kinematische Beziehungen nötig 1

b)

$$\boxed{\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{y}_3 = 0} \; 1$$

1.: 1 $\left\{\begin{aligned} & \underline{v}^A = \underline{0} \\ & \dot{y}_2 \underline{e}_y + \dot{\varphi}_2 \underline{e}_z \times (-r_2) \underline{e}_x = \underline{0} \end{aligned}\right. \Rightarrow \boxed{\dot{y}_2 - \dot{\varphi}_2 r_2 = 0}$ 1

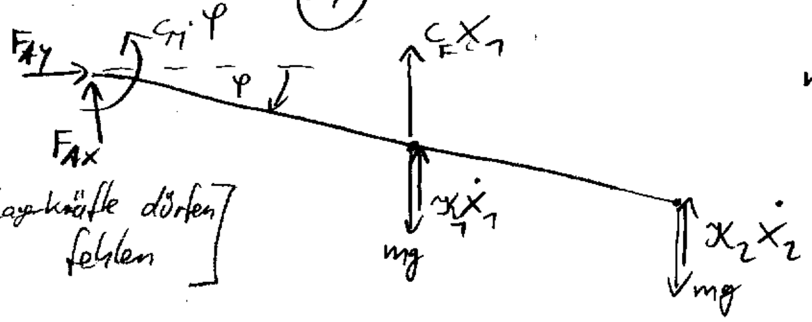
2.: 1 $\left\{\begin{aligned} & \underline{v}_B = \underline{v}_C \\ & \underline{v}_B = \dot{y}_2 \underline{e}_y + \dot{\varphi}_2 \underline{e}_z \times R_2 \underline{e}_x = (\dot{y}_2 + \dot{\varphi}_2 r_2) \underline{e}_y \\ & \underline{v}_C = \dot{\varphi}_1 \underline{e}_z \times R_1 \underline{e}_x = \dot{\varphi}_1 R_1 \underline{e}_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}_1 R_1 = \dot{y}_2 + \dot{\varphi}_2 R_2}$ 1

3.: 1
$$\left.\begin{cases} \underline{v}^D = \underline{v}^E \\ \underline{v}^D = \dot{\varphi}_1 \underline{e}_z \times (-R_1)\underline{e}_y = \dot{\varphi}_1 R_1 \underline{e}_x \\ \underline{v}^E = \dot{x}_3 \underline{e}_x + \dot{\varphi}_3 \underline{e}_z \times (-R_3)\underline{e}_y = (\dot{x}_3 + \dot{\varphi}_3 R_3)\underline{e}_x \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}_1 R_1 = \dot{x}_3 + \dot{\varphi}_3 R_3}$$
1

4.: 1
$$\left.\begin{cases} \underline{v}^F = \underline{v}^G \\ \underline{v}^F = \dot{x}_3 \underline{e}_x + \dot{\varphi}_3 \underline{e}_z \times R_3 \underline{e}_y = (\dot{x}_3 - \dot{\varphi}_3 R_3)\underline{e}_x \\ \underline{v}^G = \dot{\varphi}_1 \underline{e}_z \times r_1 \underline{e}_y = -\dot{\varphi}_1 r_1 \underline{e}_x \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{-\dot{\varphi}_1 r_1 = \dot{x}_3 - \dot{\varphi}_3 R_3}$$
1

3

a) Freischnitt: (1)



[Lagerkräfte dürfen fehlen]

mit: $x_1 = \frac{l}{2} \sin\varphi$ (1)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos\varphi \\ \dot{x}_2 &= l \dot{\varphi} \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

MTM:

$$\Theta_{AA} = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m l^2 = \frac{4}{3} m l^2 \quad (1)$$

Drallsatz:

$$-\Theta_{AA} \ddot{\varphi} = c_m \varphi + c_F \frac{l}{2} \sin\varphi \left(\frac{l}{2} \cos\varphi\right) + \varkappa_1 \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos\varphi \left(\frac{l}{2} \cos\varphi\right) -$$

$$- mg \left(\frac{l}{2} \cos\varphi\right) + \varkappa_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi (l \cos\varphi) - mg (l \cos\varphi) \quad (2)$$

mit $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\left(\varkappa_1 \frac{l^2}{4} + \varkappa_2 l^2\right)}{\Theta_{AA}} \dot{\varphi} + \frac{\left(c_m + c_F \frac{l^2}{4}\right)}{\Theta_{AA}} \varphi = \frac{mg \frac{3}{2} l}{\Theta_{AA}} \quad (1)$$

b) stat. Ruhelage:

$$\varphi_{stat} = \frac{mg \frac{3}{2} l}{c_m + c_F \frac{l^2}{4}} \quad (1)$$

Transformation:

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + \underbrace{\frac{\left(\varkappa_1 \frac{l^2}{4} + \varkappa_2 l^2\right)}{\Theta_{AA}}}_{2\delta} \dot{\tilde{\varphi}} + \underbrace{\frac{\left(c_m + c_F \frac{l^2}{4}\right)}{\Theta_{AA}}}_{\omega_0^2} \tilde{\varphi} = 0 \quad (1)$$

$$\boxed{\delta = \frac{\varkappa_1 \frac{l^2}{4} + \varkappa_2 l^2}{2 \Theta_{AA}}} \quad (1)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{c_m - c_F \frac{l^2}{4}}{\Theta_{AA}} - \left(\frac{\varkappa_1 \frac{l^2}{4} + \varkappa_2 l^2}{2 \Theta_{AA}}\right)^2} \quad (1)$$

Bedingung f. schwache Dämpfung: (1)

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} < 1 \Rightarrow \frac{\varkappa_1 \frac{l^2}{4} + \varkappa_2 l^2}{2 \Theta_{AA}} < \sqrt{\frac{c_m + c_F \frac{l^2}{4}}{\Theta_{AA}}} \quad (1)$$