Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Kinematik und Dynamik SS 2010, Nachklausur, 09.10.2010

Bitte deutlich in <u>DRUCKSCHRIFT</u> schreiben!

Name, Vorname: Musterlösung
Matr.-Nr.:
Studiengang:

1	
2	
3	
Σ	
T	

Bitte ankreuzen!

○ Studienbegleitende Prüfung ○ Übungsscheinklausur

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten in Vielfachen von [1 , kg , m , s] an:

potentielle Energie $E^{pot.}$ $\left[kg \frac{m^2}{s^2}\right]$

Reibungskoeffizient μ $[1]$

Kraftstoß $\underline{K}$ $\left[kg \frac{m}{s}\right]$

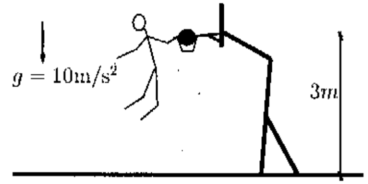
Phasenverschiebung φ $[1]$ **2 Punkte**

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten A, B der Differentialgleichung $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{v_0}{2\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t)\right)$ mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ **1 Punkt**

$$x(t=0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = +\omega_0 B + \frac{v_0}{2\omega_0} = v_0 \quad , \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3. 

Der berühmte Basketballspieler Mikhail Jordanov macht zwei Punkte mit dem abgebildeten Dunking, indem er den Ball der Masse $m = 700$g mit der Geschwindigkeit 10m/s in den Korb wirft. Wie groß ist die Aufprallgeschwindigkeit des Balles auf den Boden, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird? **1 Punkt**

$m = 700g$
$v_0 = 10\ m/s$
$h = 3m$
$v = ?$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$$

$$v^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 = 160$$

$$v = 4\sqrt{10}\ m/s$$

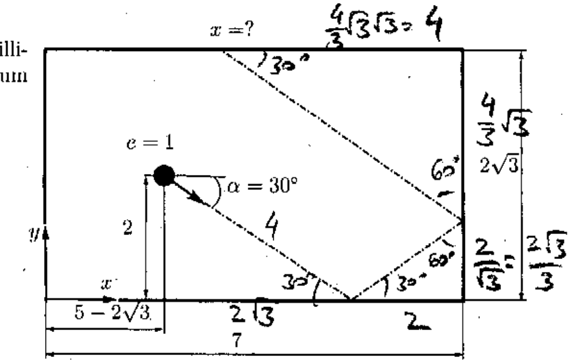
4. Gegeben sei die Geschwindigkeit $v(x) = A\sin(kx)$ eines Massenpunktes bezüglich seiner Lage $x(t)$, wobei $A = \text{const.}$, $B = \text{const.}$ sind. Berechnen Sie die Beschleunigung $a(x)$ in Abhängigkeit von der Lage $x(t)$! **1 Punkt**

$$a(x) = \frac{d\,v(x)}{dt} = \frac{\partial v(x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} = A\cos(kx)k\,v = A^2 k \sin(kx)\cos(kx)$$

5. An welcher Stelle x berührt die Billiardkugel beim vollelastischen Stoß zum ersten Mal die obere Bande?

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

$$\boxed{x = 3}$$

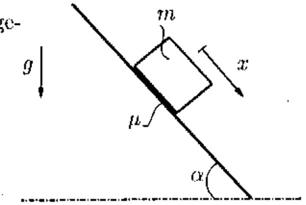


1 Punkt

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

LKM

6. Wie groß ist die Beschleunigung in x-Richtung unter den gegebenen (s. Skizze) Bedingungen?

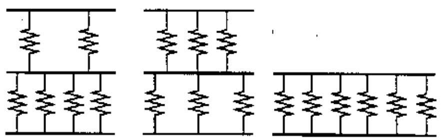


$-mg\cos(\alpha)\mu + mg\sin(\alpha) = m\ddot{x}$

1 Punkt

$\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))$

7.



Geben Sie die Federsteifigkeiten der abgebildeten, jeweils aus sechs gleich-steifen Federn mit der Federsteifigkeit c bestehenden, Modellsysteme an!

$\frac{1}{4c} + \frac{1}{2c} = \frac{1}{c_e}$ $\quad \frac{1}{3c} + \frac{1}{3c} = \frac{1}{c_e}$ $\quad \frac{1}{6c} = \frac{1}{c_e}$

1 Punkt

$\frac{8}{6}c$ $\quad \frac{3}{2}c$ $\quad 6c$

8. Berechnen Sie die statische Ruhelage des Systems mit der kinematischen Bedingung $\varphi = \pi x$, welches durch die Differentialgleichung $\frac{2a}{5}\ddot{x} + a^2\varphi\dot{x} + b^2\dot{\varphi}x + \ddot{\varphi} - 3x = 5mg$ beschrieben wird.

$\pi x \quad \pi\dot{x} \quad \pi\ddot{x}$

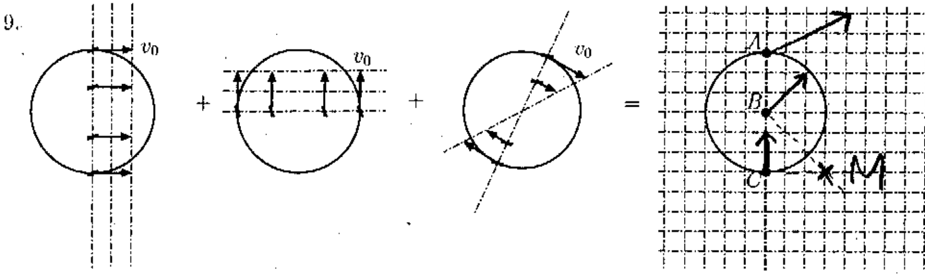
$x_{stat} = -\frac{5}{3}mg$

1 Punkt

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

LKM

9.



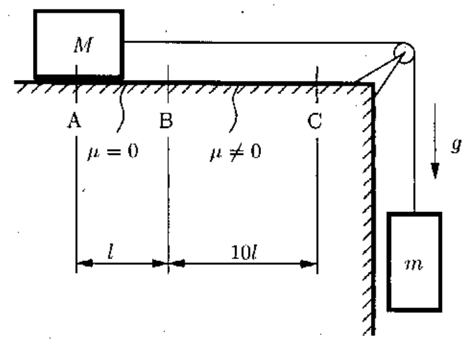
Die zusammengesetzte Bewegung aus zwei Translationen und einer Rotation soll durch die Geschwindigkeiten in den Punkten A, B, C dargestellt und der Momentanpol bestimmt werden. Zeichnen Sie die 3 Geschwindigkeitsvektoren und den Momentanpol in die Skizze rechts ein.

1 Punkt

Rechenteil

1 (15 Punkte)

Zwei Massen M und m sind über ein Seil miteinander verbunden. Zum Zeitpunkt ($t = 0$) besitzt das System die Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$. Der Klotz M gleitet von A nach B reibungsfrei. Von B nach C herrscht der Reibungskoeffizient μ.



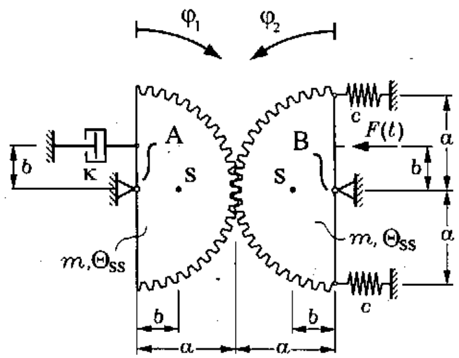
(a) Fertigen Sie Freischnitte beider Massen an für den ersten Bereich A bis B, Stellen Sie die Newtonschen Grundgleichungen auf und finden Sie mit Hilfe einer kinematischen Beziehung die Bewegungsgleichung des Systems. Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Position $x(t)$. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse M im Punkt B?

(b) Betrachten Sie nun den Bereich B bis C (Hinweis: Es werden neue Variablen x und t eingeführt, die im Punkt B von null starten). Schneiden Sie die Massen frei und stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf. Benutzen Sie Coulomb-Reibung. Berechnen Sie nun die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Position $x(t)$. Benutzen Sie die Bedingung $v(t_C) = 0$ um t_C zu berechnen. Bestimmen Sie nun den Reibungskoeffizienten μ, damit der Klotz genau an der Stelle C zum Halten kommt?

Geg.: l, $M = 2m$, m, μ, g

$\boxed{2}$ (16 Punkte)

Das skizzierte System besteht aus zwei Zahnscheiben, zwei Federn und einem Dämpfer und wird von der Kraft $F(t)$ angetrieben. Die Federn sind in der skizzierten Lage entspannt. Die Erdbeschleunigung wird vernachlässigt.



(a) Fertigen Sie vollständige Freischnitte an und stellen Sie den Drallsatz für beide Zahnscheiben auf. Gehen Sie von kleinen Auslenkungen aus. Beachten Sie, dass das Massenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes S der Zahnscheiben gegeben ist. Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems in φ_1.

(b) Geben Sie für den Fall schwacher Dämpfung die Eigenkreisfrequenz der <u>freien</u> gedämpften Schwingung und den Abklingkoeffizienten an! Geben Sie eine allgemeine Lösung der linearen Bewegungsdifferentialgleichung der <u>freien</u> gedämpften Schwingung an (in Abhängigkeit von ω_d und δ). Passen Sie diese Lösung an die Anfangsbedingungen $\varphi_1(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}_1(t = 0) = 0$ an.

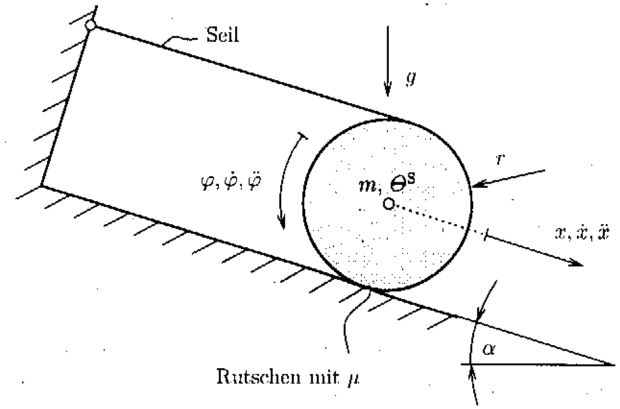
(c) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung im eingeschwungenen Zustand. Benutzen Sie einen Ansatz vom Typ der rechten Seite um die Amplitude und die Phasenverschiebung der stationären Schwingung zu <u>berechnen</u>. (Hinweis: Die Antwortamplitude darf in Abhängigkeit der Phasenverschiebung dargestellt werden!)

Geg.: a, b, κ, c, m, Θ_{SS}, $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$, F_0, Ω

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

$\boxed{3}$ (9 Punkte)

Auf einer Rolle, die sich auf einer schiefen Ebene mit dem Winkel α zur Horizontalen befindet, ist ein Seil aufgewickelt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der Rolle abhängig von t, wenn der Schwerpunkt für $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0 besitzt.
Gehen Sie dazu wie folgt vor:



(a) Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen der Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\dot{x}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ an.

(b) Schneiden Sie die Rolle frei. Benutzen Sie den Schwerpunktsatz und den Drallsatz um die Bewegungsgleichung der Rolle in x aufzustellen. Nehmen Sie Coulombsche Reibung an. Wie groß ist $\dot{x}(t)$?

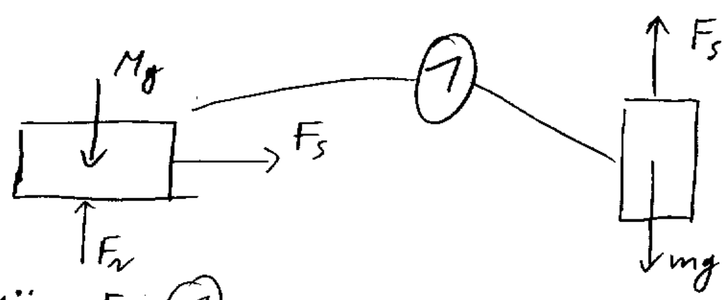
(c) Was muss für μ gelten, damit die Geschwindigkeit $\dot{x}$ mit der Zeit größer wird, wenn für den Neigungswinkel gilt: $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$?

Geg.: r, μ, α, g, m, Massenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt $\Theta^S = \frac{1}{2}mr^2$, Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(t = 0) = v_0$.

Musterlösung 3. Klausur Kinematik & Dynamik SS 2010

$\boxed{A1}$

a) Freischnitt:



$M\ddot{x}_1 = F_S$ 1 $\qquad m\ddot{x}_2 = mg - F_S$ 1

kin. Bez.: $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$ 1

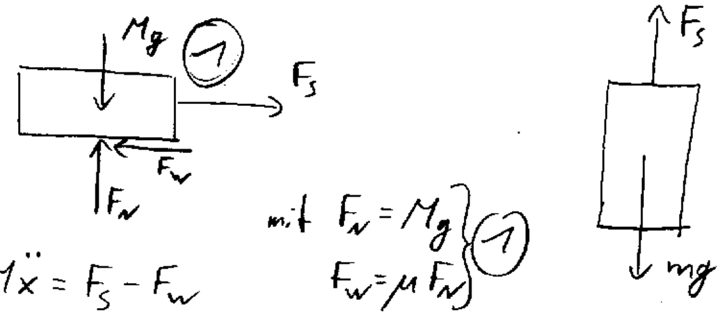
$\ddot{x} = \frac{1}{3} g$ 1

$v(t) = \frac{1}{3} g t$ 1 mit $v(t=0)=0$

$x(t) = \frac{1}{6} g t^2 \rightarrow \frac{1}{6} g t_B^2 = l \Rightarrow t_B = \sqrt{6\frac{l}{g}}$ 1

$\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{3} g l}$ 1

b) Freischnitt:
(t, x starten wieder von Null)



$M\ddot{x} = F_S - F_W \qquad$ mit $\left.\begin{array}{l} F_N = Mg \\ F_W = \mu F_N \end{array}\right\}$ 1 $\qquad m\ddot{x} = mg - F_S$

$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{3} g (1-2\mu)$ 1

$v(t) = \int_0^t \frac{1}{3} g (1-2\mu)\, dt$

$= \frac{1}{3} g (1-2\mu) t + v_B$ 1 mit $v(t=0) = v_B$

$x(t) = \frac{1}{6} g (1-2\mu) t^2 + v_B t$ 1 mit $x(t=0) = 0$

$v(t_c) = 0 = \frac{1}{3} g (1-2\mu) t_c + v_B$

$\Rightarrow t_c = \frac{1}{2\mu - 1} \sqrt{6 \frac{l}{g}}$ 1

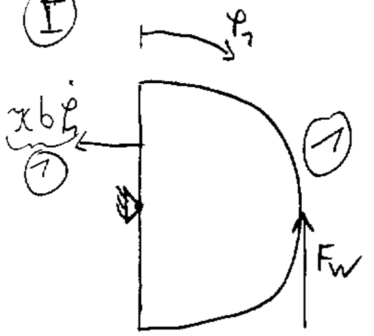
$x(t_c) = 10 l \Rightarrow \mu = \frac{11}{20}$ 1

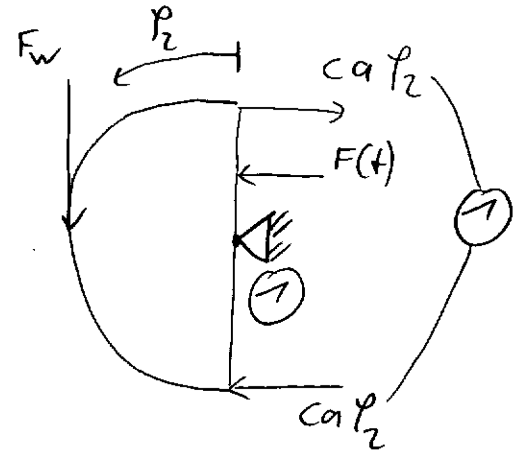
$\boxed{A2}$

a) $\Theta_{AA} = \Theta_{BB} = \Theta_{SS} + b^2 m$ 1

Freischnitte:

I





Drallsatz:

$-\Theta_{AA} \ddot{\varphi}_1 = \varkappa b^2 \dot{\varphi}_1 + F_W \cdot a$ 1 $\qquad \Theta_{BB} \ddot{\varphi}_2 = -2c \varphi_2 a^2 + F_W a + F(t) \cdot b$ 1

mit: $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2$ 1

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{\varkappa b^2}{(\Theta_{AA}+\Theta_{BB})} \dot{\varphi}_1 + \frac{2ca^2}{(\Theta_{AA}+\Theta_{BB})} \varphi_1 = \frac{b F_0}{(\Theta_{AA}+\Theta_{BB})} \cos(\Omega t)$$ 1

b)

$$\left.\begin{aligned} 2\delta &= \frac{\varkappa b^2}{(\Theta_{AA}+\Theta_{BB})} \\ \omega_d &= \sqrt{-\frac{\varkappa^2 b^4}{4(\Theta_{AA}+\Theta_{BB})^2} + \frac{2ca^2}{(\Theta_{AA}+\Theta_{BB})}} \end{aligned}\right\}$$ 1

Allg. Lösung:

$\varphi_1(t) = e^{-\delta t}\left(A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)\right)$

$\varphi_1(t=0) = \varphi_0 = A$ 1

$\dot{\varphi}_1(t=0) = 0 = -\delta A + \omega_d B \Rightarrow B = \frac{\delta \varphi_0}{\omega_d}$ 1

c) Ansatz: $\varphi_1(t) = \hat{\varphi} \cos(\Omega t - \alpha)$ $\qquad \cos(\Omega t) \cdot [\ldots] = 0$ 1

$\sin(\Omega t) \cdot [\ldots] = 0$ 1

mit $\cos(\Omega t - \alpha) = \cos(\Omega t)\cos(\alpha) + \sin(\Omega t)\sin(\alpha)$

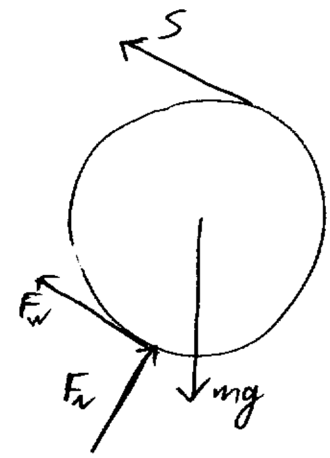
$$\tan(\alpha) = \frac{\varkappa b^2 \Omega}{2ca^2 - \Omega^2(\Theta_{AA}+\Theta_{BB})}$$ 1

$$\hat{\varphi} = \frac{b F_0}{-(\Theta_{AA} + \Theta_{BB})\cos(\alpha)\Omega^2 + \varkappa b^2 \Omega \sin(\alpha) + 2ca^2\cos(\alpha)}$$ 1

$\boxed{A3}$

a) $\dot{x} = r\dot{\varphi}$ 1

b) Freischnitt:



1

Schwerpunktsatz:

$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - S - F_W$ 1 mit $\left.\begin{array}{l} F_N = mg\cos\alpha \\ F_W = \mu F_N \end{array}\right\}$ 1

Drallsatz:

$\Theta^S \ddot{\varphi} = S r - F_W r$ 1

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{g(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)}{1 + \frac{\Theta^S}{mr^2}}$$ 1

$\dot{x}(t) = \frac{2}{3} g(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)t + v_0$ 1

c) Bedingung: $(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha) > 0$ 1

$\mu < \frac{1}{2}\tan\alpha$ 1

$\Sigma 9$