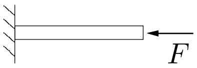
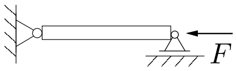
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

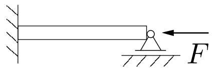
Technische Universität Berlin LKM

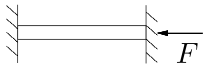
Theorieteil Name: Matrikelnr.:

1. Identifizieren Sie an dem mit Federn gelagerten Knickstab die Nummern der EULERschen Knickfälle:

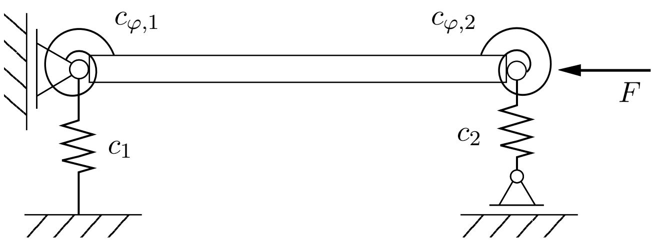
Nr. 1: 

Nr. 2: 

Nr. 3: 

Nr. 4: 

Tragen Sie die jeweilige Nummer des EULER-Knickfalls für folgende Kombinationen von Feder- und Drehfederkonstanten ein: **(1 Punkt)**



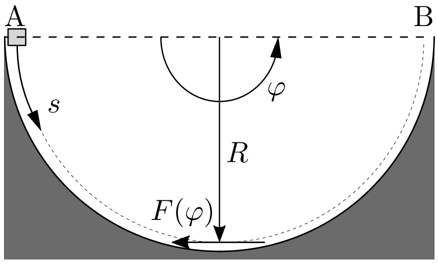
$c_{\varphi,1} = \infty$, $c_{\varphi,2} = 0$, $c_1 = \infty$, $c_2 = 0$ Nr.:

$c_{\varphi,1} = c_{\varphi,2} = 0$, $c_1 = c_2 = \infty$ Nr.:

$c_{\varphi,1} = c_{\varphi,2} = \infty$, $c_1 = c_2 = \infty$ Nr.:

$c_{\varphi,1} = \infty$, $c_{\varphi,2} = 0$, $c_1 = c_2 = \infty$ Nr.:

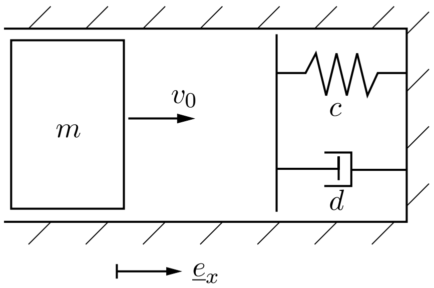
2. Berechnen Sie die Arbeit W_{AB} entlang der Bahnkurve von A nach B, die von der Kraft F an der Masse geleistet wird. **(1 Punkt)**



Geg.: R, $F(\varphi) = \frac{4Rkm}{\pi^2}\varphi$

$W_{\mathrm{AB}} =$

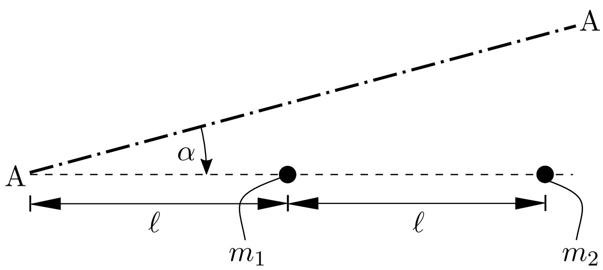
3. Tragen Sie für die gegebenen Dämpfungs- und Federkonstanten den Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}'$ der Masse m nach dem Auftreffen auf das Feder-Dämpfer-System ein. Welche Stoßzahl e würde jeweils für das Feder-Dämpfer-System gelten? Geg.: m, $\underline{v}_0 = v_0\underline{e}_x$ **(1 Punkt)**



$c = 0$, $d \neq 0$ $\rightarrow$ $\underline{v}' =$ $e =$

$d = 0$, $c \neq 0$ $\rightarrow$ $\underline{v}' =$ $e =$

4. Wie lautet das Massenträgheitsmoment $\Theta^{\mathrm{AA}}_{\mathrm{Ges}}$ der beiden Punktmassen zusammen bei Rotation um die A-A Achse? **(1 Punkt)**

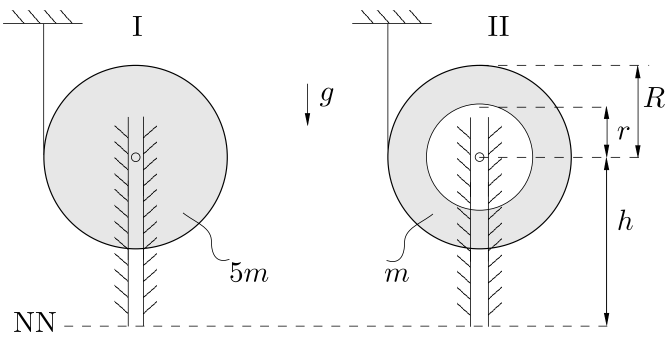


Geg.: m_1, m_2, ℓ=konst., α=konst.

$\Theta^{\mathrm{AA}}_{\mathrm{Ges}} =$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5. Ein Voll- und ein Hohlzylinder mit gleichem Außenradius R rollen aus der Ruhelage an einem vorher aufgewickelten Seil ab. Beide Massen seien unterschiedlich. Welcher Körper hat laut dem Energiesatz die größere Winkel-, resp. Schwerpunktsgeschwindigkeit bei der mit NN gekennzeichnete Höhe? Kreuzen Sie an.
Geg.: $\Theta_{\mathrm{I}} = \frac{5m}{2}R^2$, $\Theta_{\mathrm{II}} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$, R, h, r, g **(1 Punkt)**



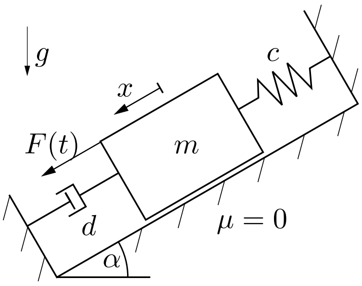
- ☐ Körper I
- ☐ Körper II
- ☐ gleiche Geschwindigkeiten

(Nebenrechnungen können auf einem Extrablatt durchgeführt werden)

6. Gegeben ist ein schwingungsfähiges mechanisches System mit folgender Differentialgleichung in x:

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \sin(\alpha)g + \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Kreuzen Sie nur die richtigen Aussagen über den Dämpfungsgrad δ, die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω, das LEHRsche Dämpfungsmaß D und die statische Ruhelage x_{stat} an.
Geg.: c, d, $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$, F_0, Ω, α, g, m, $\mu = 0$



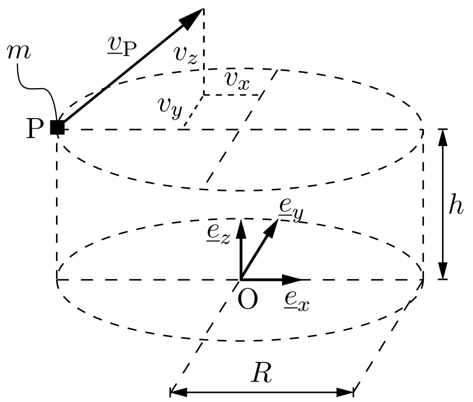
- ☐ $\delta = 2\frac{d}{m}$
- ☐ $\omega = 2\pi\sqrt{\frac{c}{m}}$
- ☐ $D = \frac{d}{2m}\sqrt{\frac{m}{c}}$

(1 Punkt)

- ☐ $x_{\mathrm{stat}} = \frac{mg}{c}$
- ☐ $x_{\mathrm{stat}} = \sin(\alpha)\frac{mg}{c}$
- ☐ $x_{\mathrm{stat}} = \frac{\sin(\alpha)mg + F_0}{c}$

(1 Punkt)

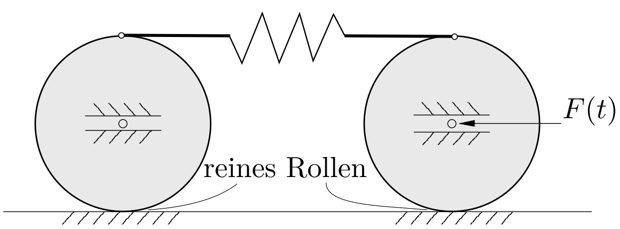
7. Geben Sie den Drehimpuls der Punktmasse m bezogen auf den Koordinatenursprung O an. **(1 Punkt)**



Geg.: R, h, m, v_x, v_y, v_z

$\underline{L}^{(\mathrm{O})} =$

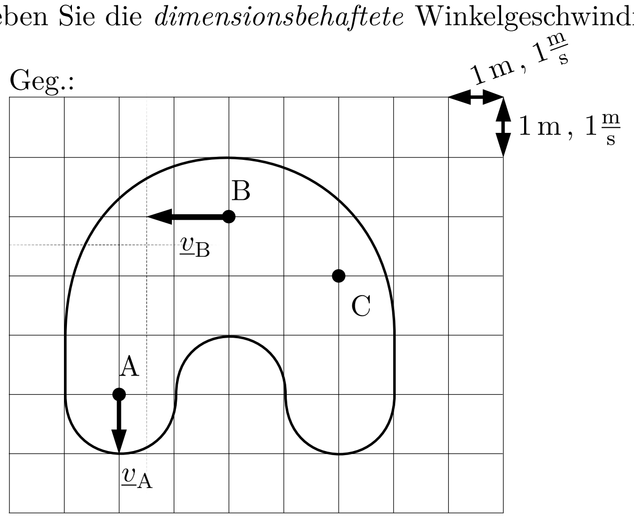
8. Wie viele Freiheitsgrade hat das gezeigte ebene System, bestehend aus 2 rein rollenden Walzen der Massen m, die mit einer Feder verbunden sind? Tragen Sie ein. **(1 Punkt)**



Anzahl der Freiheitsgrade: ☐

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

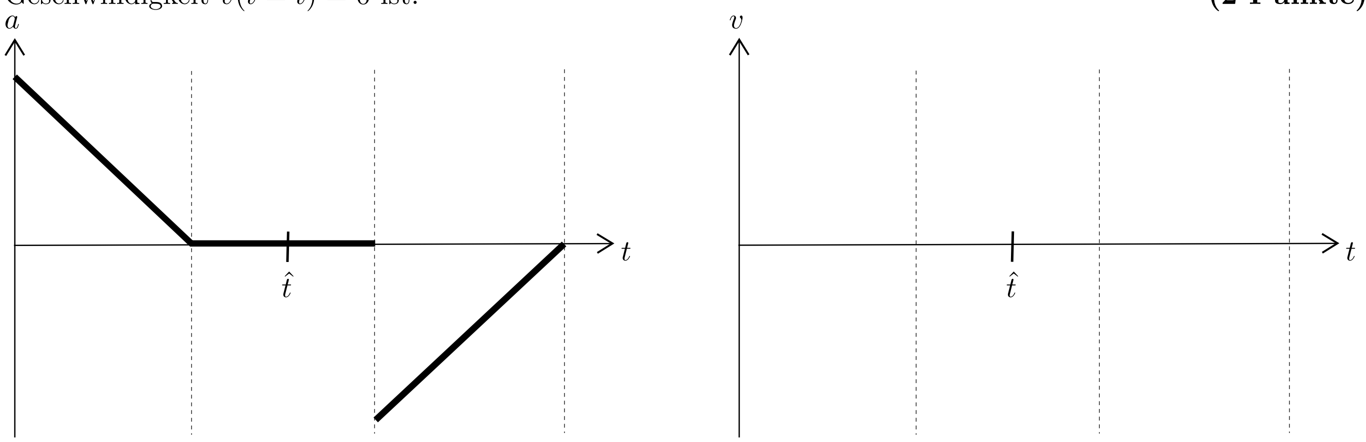
9. Im Zeitpunkt der dargestellten ebenen Starrköperbewegung gilt die Momentanpunktgleichung $\underline{v}^{\mathrm{P}} = \underline{\omega} \times \underline{x}^{\Pi\mathrm{P}}$. Zeichnen Sie den Momentanpol Π und die Geschwindigkeit des Punktes C maßstabsgetreu in die Skizze ein. Geben Sie die *dimensionsbehaftete* Winkelgeschwindigkeit des Starrkörpers an. **(3 Punkte)**



$\omega =$

10. Gegeben ist die ortsabhängige Beschleunigungsfunktion: $a(x) = Ax^2$. Leiten Sie ortsabhängige Geschwindigkeitsfunktion $v(x)$ her, wenn $x(t = 0) = 0$ und $v(t = 0) = v_0$ ist. **(1 Punkt)**
Geg.: A, v_0

11. Zeichnen Sie zum gegebenen Beschleunigungsprofil das Geschwindigkeitsprofil, wenn zum Zeitpunkt $\hat{t}$ die Geschwindigkeit $v(t = \hat{t}) = 0$ ist. **(2 Punkte)**

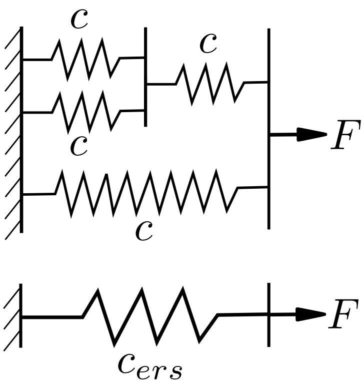


12. Bitte kreuzen Sie richtige Aussagen an. (mehrere Antworten möglich) **(1 Punkt)**

- ☐ Der Betrag der Arbeit einer konservativen Kraft von A nach B ist gleich dem Betrag der Arbeit von B nach A.
- ☐ Bei einem konservativen Kraftfeld ist das geschlossene Wegintegral gleich Null.
- ☐ Eine konservative Kraft ist darstellbar als Gradient eines Potentials.
- ☐ Die Arbeit von Federkräften, Drehfederkräften und Reibkräften gehen als potentielle Energie im Energiesatz ein.

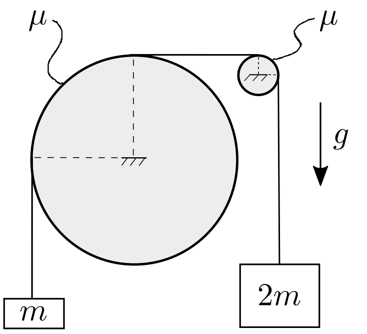
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

13. Wie muss die Ersatzsteifigkeit c_{ers} gewählt werden, damit die gezeigten Systeme äquivalent sind?
Geg.: F, c **(1 Punkt)**



$c_{ers} =$

14. Das System besteht aus zwei *nicht drehbaren* Zylindern mit unterschiedlichen Radien. Zwei unterschiedliche Massen sind durch ein Seil miteinander verbunden. Zwischen dem Seil und den Rollen herscht EULER-EYTELWEINsche Seilreibung. Geben Sie die untere Grenze für den Haftreibungskoeffizienten μ an, damit das System noch ruht. Geg.: g, m **(1 Punkt)**

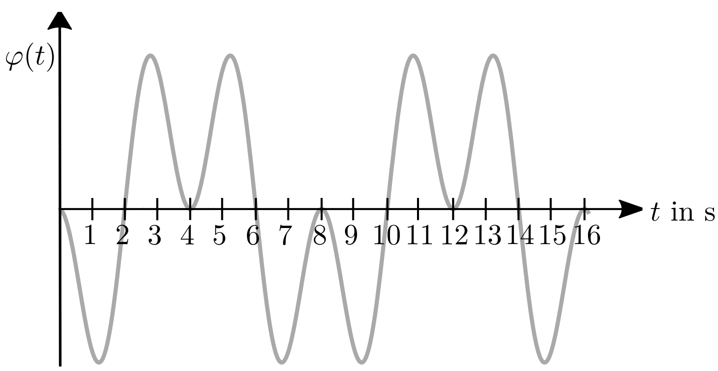


$\mu =$

15. Geben Sie die Maßeinheiten der folgend aufgeführten Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, N, kg, m, s und K an: **(1 Punkt)**

Größe	Symbol	Einheit
Winkelbeschleunigung	$\ddot{\varphi}$	
potentielle Energie	E_{pot}	
Kraftstoß	$K = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\mathrm{d}t$	

16. Entnehmen Sie dem dargestellten harmonischen Schwingungsverlauf die Periodendauer T und tragen Sie diese *dimensionsbehaftet* ein. **(1 Punkt)**



$T =$

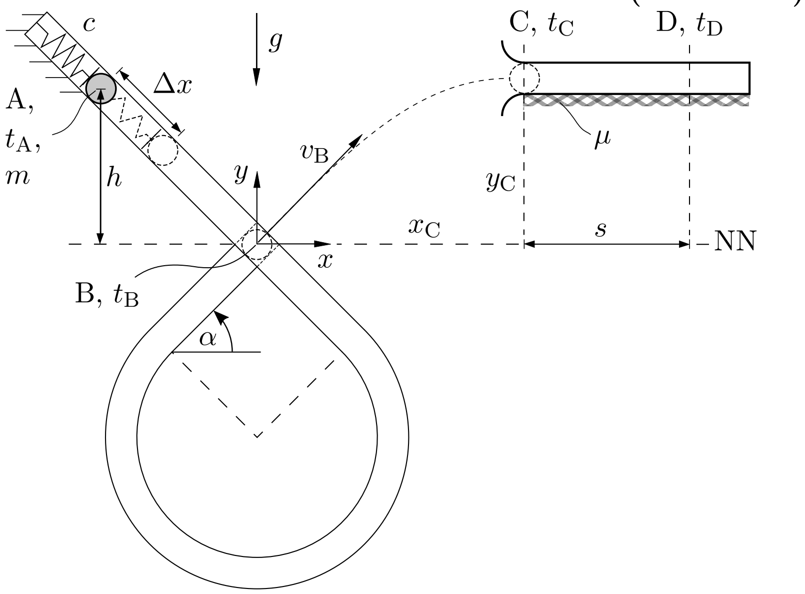
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Rechenteil

Allgemeiner Hinweis: Haben Sie einen Aufgabenteil nicht gelöst, rechnen Sie mit selbstgewählten Symbolen dafür weiter. Verwenden Sie ansonsten ausschließlich die gegebenen Größen.

1 Punktkinetik, Wurf **(13 Punkte)**

Eine Punktmasse m wird durch eine vorgespannte Feder in eine reibungsfreie Loopingbahn befördert. Zwischen den Punkten B und C bewegt sich die Masse frei, um in C horizontal in eine reibungsbehaftete Führung zu gelangen. Im Punkt D kommt sie bei der Koordinate $x = x_C + s$ zum Stehen. Zum Zeitpunkt t_A ist sie in Ruhe.



a) Welchen Geschwindigkeitsbetrag v_B besitzt die Masse in B? **Tipp:** Energiesatz. **(2P)**

b) Nehmen Sie im Folgenden v_B als gegeben an. Wie müssen die Wurflänge und Wurfhöhe, x_C und y_C gewählt werden, damit die Masse horizontal in die Führung bei C trifft? **Hinweis:** Stellen Sie im Bereich B-C die Bewegungsdifferentialgleichungen des Wurfvorgangs auf und ermitteln Sie die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. **(6P)**

c) Wie groß ist der Geschwindigkeitsbetrag im Punkt C? Berechnen Sie die verrichtete Arbeit W_{CD} und den Bremsweg s. **Hinweis:** Nutzen sie den Arbeitssatz. **(5P)**

Geg.: c, Δx, g, m, h, α, μ, $v(t_A) = 0$

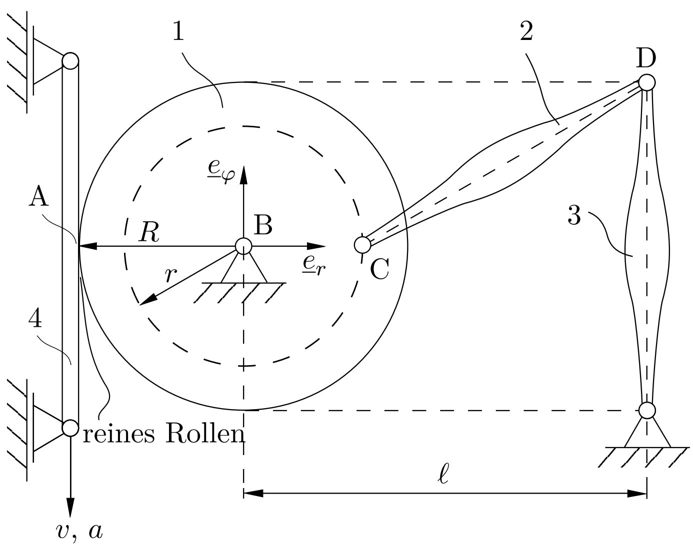
2 Kinematik **(11 Punkte)**

Im dargestellten System wird die in B drehbar gelagerte Scheibe 1 durch die Bewegung des Stabes 4 angetrieben. Stab 4 besitzt die momentane Vertikalgeschwindigkeit v und -beschleunigung a und ist über reines Rollen mit der Scheibe 1 verknüpft. In den Punkten C und D sind weitere, gelenkig gelagerte Stäbe angebracht.

a) Geben Sie die momentane Winkelgeschwindigkeit ω_1, sowie die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$ der Scheibe 1 an. **(2P)**

b) Bestimmen Sie den derzeitigen Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}_C$, sowie den Beschleunigungsvektor $\underline{a}_C$ des Punktes C im gegebenen Koordinatensystem. **(4P)**

c) Geben Sie zum dargestellten Zeitpunkt den Ortsvektor des Momentanpols $\underline{x}^{\Pi_2}$ und damit die Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Scheibe 2 an. Bestimmen Sie den momentanen Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}_D$ des Punktes D. **(5P)**
Tipp: Momentanpunktgleichung, Eulersche Geschwindigkeitsgleichung



Geg.: R, r, ℓ, v, a

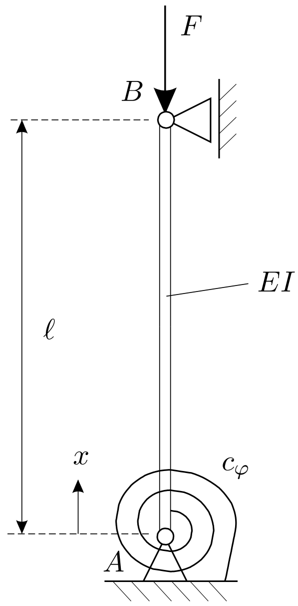
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 Knicken (14 Punkte)

Ein Stab ist über ein Fest- und ein Loslager eingespannt, wobei am Festlager A zusätzlich eine Drehfeder angebracht ist. Der so eingespannte Stab soll auf Knickung untersucht werden. Die Knickdifferentialgleichung dieses Problems lautet:

$$w^{IV} + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{, mit } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

und dem Lösungsansatz: $w(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\alpha x + D$.
Bestimmen Sie die Eigenwertgleichung des Knickproblems folgendermaßen:



a) Geben Sie die notwendigen Randbedingungen des Systems an und bestimmen Sie die nötigen Ableitungen des Lösungsansatzes. **(6P)**
Tipp: Freischnitt des ausgelenkten Systems am Lager A.

b) Notieren Sie das charakteristische Gleichungssystem, indem Sie die Randbedingungen mit den Ableitungen des Lösungsansatzes auswerten. Geben Sie das Gleichungssystem in Matrixschreibweise an. **(5P)**

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix aus b) die Eigenwertgleichung des Systems für den Spezialfall einer unendlich steifen Drehfeder, $c_\varphi \to \infty$.
Tipp: Determinantenverfahren (CRAMERsche Regel, LAPLACEscher Entwicklungssatz) **(3P)**

Geg.: EI, ℓ, c_φ

4 Kinetik (14 Punkte)

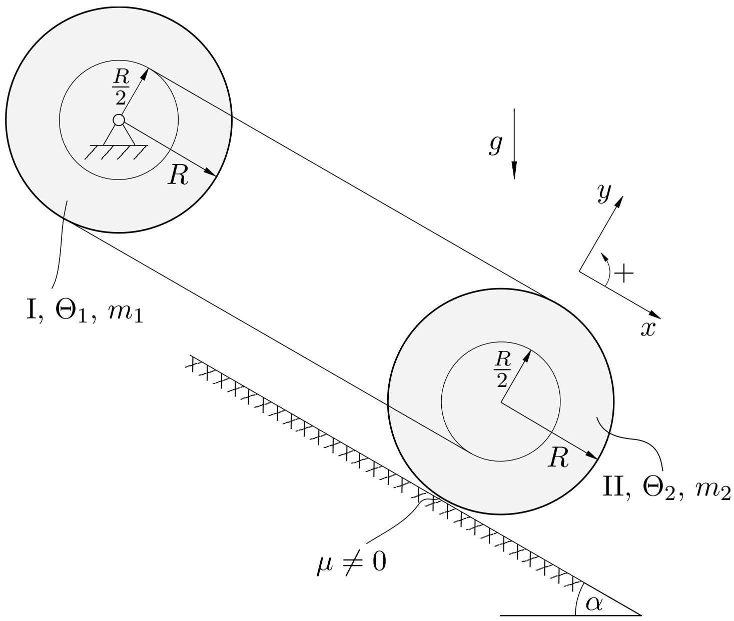
Zwei drehbare Rollen sind über zwei vorher aufgewickelte Seile verknüpft. Die Seile sind immer gespannt und rollen ohne Schlupf auf den Rollen auf oder ab. Der Schwerpunkt der oberen Scheibe ist fest, während die untere Scheibe auf einer im Winkel α geneigten Ebene reibungsbehaftet gleitet. Zur Zeit $t_0 = 0$ ist das System in Ruhe.

a) Fertigen Sie passende Freischnitte beider Rollen an, und stellen Sie geeignete Drall- und Schwerpunktsätze auf. Wieviele kinematische Beziehungen sind nötig, um das verbleibende Gleichungssystem lösen zu können? **(6P)**

b) Geben Sie die nötigen kinematischen Beziehungen an. **Tipp**: EULERsche Geschwindigkeitsgleichung, Seilbedingung **(3P)**

c) Stellen Sie mit Hilfe der Gleichungen aus a) und b) die Bewegungsdifferentialgleichung in x auf. Integrieren Sie diese einmal mit Hilfe der Anfangsbedingungen, und geben Sie die Geschwindigkeitsfunktion $v_2^S(t)$ des Schwerpunkts der Rolle II an! **(3P)**

d) Geben Sie den Grenzwinkel $\alpha \neq 0$ an, unter dem das System noch ruht. **(2P)**

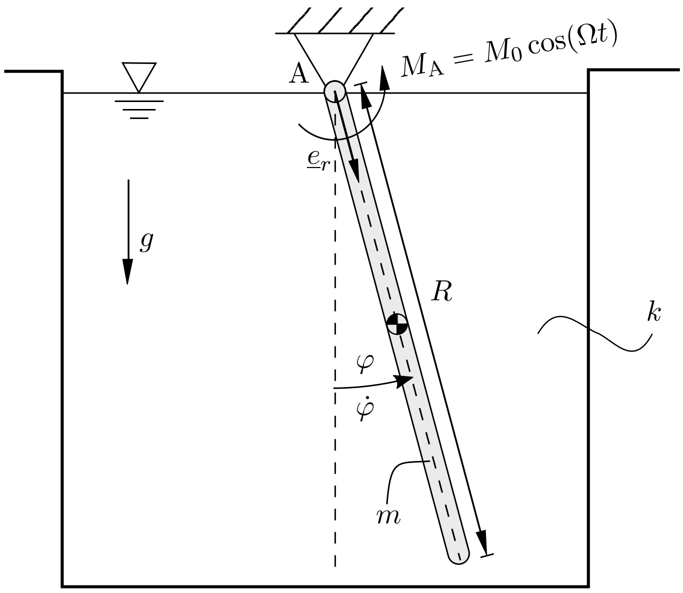


Geg.: R, m_1, m_2, Θ_1, Θ_2, μ, g, α, $v_2^S(t = t_0) = 0$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5 gedämpfte, angefachte Schwingung (14 Punkte)

Ein langer, dünner, homogener, starrer Balken ist drehbar im Punkt A gelagert und befindet sich in einer viskosen Flüssigkeit. Er wird durch das äußere Moment $M_\mathrm{A}(t)$ fremdangeregt. Seine Ruhelage ist bei $\varphi = 0$. Die Archimedessche Auftriebskraft und Umströmungseffekte werden vernachlässigt. In der Flüssigkeit soll die Stokessche Reibung: $\underline{F}_k = -k\underline{v}$ angenommen werden.



a) Bestimmen Sie die Größe und die Lage der resultierenden Reibkraft F_Res im gegebenen Polarkoordinatensystem. Geben Sie dafür in einem beliebigen Zeitpunkt (für eine beliebige Winkellage) den linearen Verlauf der Geschwindigkeit $v(r)$ senkrecht zum Balken an. **(4P)**
Hinweis: Die geschwindigkeitsabhängige Streckenlast lautet: $q(r) = -\frac{k}{R}v(r)$.

b) Fertigen Sie einen Freischnitt am beliebig, positiv ausgelenkten System an. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung in φ auf und linearisieren Sie diese für kleine Winkel φ. **Tipp**: Drallsatz **(4P)**

c) Geben Sie die Eigenkreisfrequenz des gedämpften und des ungedämpften Systems, ω_d und ω, ausschließlich in gegeben Größen an. Geben Sie den Bereich für k an, damit Schwingungen überhaupt möglich sind. **(4P)**

d) Geben Sie eine Anregungsfrequenz Ω^* in gegebenen Größen an, damit die Phasenverschiebung $\Phi = \frac{\pi}{4}$ beträgt.
Hinweis: $\tan(\Phi) = \frac{2D\eta}{1-\eta^2} \quad , \eta = \frac{\Omega}{\omega}$. **(2P)**

Geg.: $M_\mathrm{A}(t) = M_0 \cos(\Omega t)$, M_0, Ω, R, k, m, g

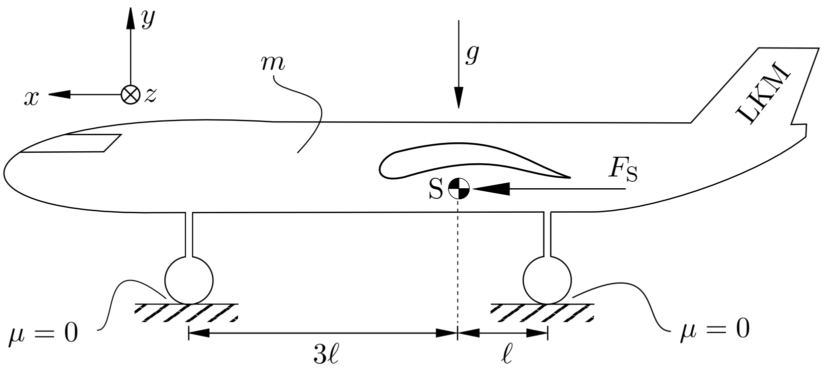
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

6 Kinetik (14 Punkte)

Das Flugzeug der LKM-Airline wird als Starrkörper angenommen der sich ohne Haft- oder Gleitreibung auf der Startbahn bewegt. Die Schubkraft der Triebwerke F_{S} greife horizontal im Schwerpunkt S an. Mit zunehmender Geschwindigkeit in x-Richtung kommen folgende geschwindigkeitsproportionale Kräfte hinzu:

$$\underline{F}_{\mathrm{A}}(\underline{v}_{\mathrm{S}}) = c_{\mathrm{A}}|\underline{v}_{\mathrm{S}}|\underline{e}_y \quad \text{(Auftrieb)} \quad \text{und} \quad \underline{F}_{\mathrm{W}} = -c_{\mathrm{W}}\underline{v}_{\mathrm{S}} \quad \text{(Luftwiderstand)}\ .$$

Sie greifen im Schwerpunkt an. Zu Beginn des Startvorgangs gilt: $x_{\mathrm{S}}(t=0) = 0$ und $\dot{x}_{\mathrm{S}}(t=0) = 0$.



a) Fertigen Sie einen vollständigen Freischnitt aller auf den Starrkörper wirkenden Kräfte an. Stellen Sie die Schwerpunktsätze in x- und y-Richtung auf. **(3P)**

b) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung in x und berechnen Sie die Lösung der Orts- und Geschwindigkeitsfunktion $x_{\mathrm{S}}(t)$ und $\dot{x}_{\mathrm{S}}(t)$. **(6P)**
Hinweis: Der Lösungsansatz einer Differentialgleichung der Form: $\boxed{\ddot{x} + a\dot{x} = b}$ lautet:

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-at} + \frac{b}{a}t + C_2\ .$$

c) Welche Bedingungen gelten im Zeitpunkt t_{ab} des Abhebens beider Räder von der Startbahn? Berechnen Sie t_{ab}. **(3P)**

d) Welche Länge x_{ab} muss die Startbahn mindestens haben? **(2P)**

Geg.: m, ℓ, F_{S}, g, c_{A}, c_{W}