Theoriefragen:

T1) (2 Punkte)

- Wie ist das Deviationsmoment I_{yz} definiert?

$I_{yz} := - \int zy\,dA$

- Bezogen auf ein bestimmtes Koordinatensystem werden die axialen Trägheitsmomente extremal und die Deviationsmomente null. Wie heißt dieses Koordinatensystem? Hauptachsensystem

T2) (2 Punkte)

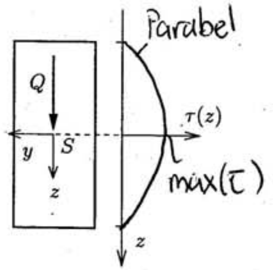
An einem rechteckigen Balkenquerschnitt mit der Fläche A wirkt die Querkraft Q.

- Zeichnen Sie in die Skizze den qualitativen Verlauf der Schubspannungen $\tau(z)$.
- Kreuzen Sie die richtige Aussage an:

○ $\max(\tau) = \frac{Q}{A}$

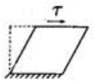
○ $\max(\tau) < \frac{Q}{A}$

⊗ $\max(\tau) > \frac{Q}{A}$



T3) (1 Punkt)

- Wie lautet das HOOKEsche Gesetz für die Tangentialspannungen? Wie heißen die Größen, die in der Gleichung vorkommen?



$\tau(\gamma) = G\gamma$ γ: Gleitung, Scherwinkel

G: Gleitmodul, Schubmodul

T4) (1 Punkt)

Man gebe die Einheiten folgender physikalischer Größen an:

Querkontraktionszahl $[\nu]=$ — Widerstandsmoment $[W]=$ m^3

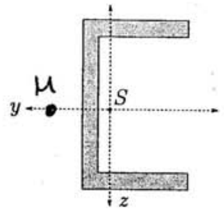
Thermischer Ausdehnungskoeffizient $[\alpha_T]=$ K^{-1} Dehnung $[\varepsilon]=$ —

T5) (1 Punkt)

- Wie heißt der Punkt, wo die Querkraft Q angreifen müsste, so dass sie dann keine Verdrehung des Balkenquerschnitts verursachen würde?

- Schubmittelpunkt

- Zeichnen Sie für das skizzierte Balkenprofil die ungefähre Lage dieses Punktes.



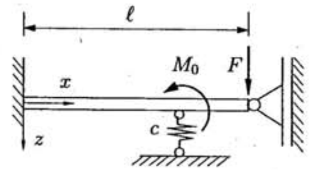
T6) (1 Punkt)

Gegeben sei ein Balken, wobei die Biegelinie durch Integration der Streckenlast berechnet werden soll. Der Balken habe N Integrationsbereiche.

- Insgesamt wieviele Integrationskonstanten gibt es? $4N$
- Insgesamt wieviele Übergangsbedingungen existieren? $4(N-1)$

T7) (2 Punkte)

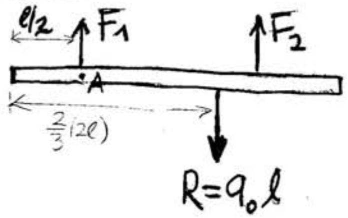
Tragen Sie in die gegebene Tabelle die Randbedingungen des skizzierten Balkens ein (alle Felder sind auszufüllen):



	$x=0$	$x=\ell$
w	0	/
w'	0	/
M	/	0
Q	/	F

Aufgabe 1

a)



(1)

Kräfte: $\sum M^A = F_2 \cdot l - R\left(\frac{4l}{3} - \frac{l}{2}\right) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{5}{6} q_0 l}$ (1)

$\sum F = F_1 + F_2 - q_0 l \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{1}{6} q_0 l}$ (1)

Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{F_1}{A} = \frac{1}{6}\frac{q_0 l}{A} \\ \sigma_2 &= \frac{F_2}{A} = \frac{5}{6}\frac{q_0 l}{A} \end{aligned}\right\}$$ (1)

Dehnungen:

$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{1}{6}\frac{q_0 l}{EA}$ (1)

$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{5}{6}\frac{q_0 l}{EA}$ (1)

b) $\varepsilon_1 + \varepsilon_T \overset{!}{=} \varepsilon_2$ bzw $\varepsilon_T \overset{!}{=} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 =: \Delta\varepsilon$ (1)

$\Rightarrow \alpha_T \Delta T \overset{!}{=} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)\frac{q_0 l}{EA}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{2}{3}\frac{q_0 l}{EA\alpha_T}}$ (1)

c) $\varepsilon_2 = \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \Delta h = h \cdot \varepsilon_2$

$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{5}{6}\frac{q_0 l h}{EA}}$ (1)

Aufgabe 2

a) $q(x) = q_0$

$-Q(x) = q_0 x + C_1$

$-M(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$ (1)

RB: $\begin{cases} M(0) \overset{!}{=} 0 & \Rightarrow C_2 = 0 \\ M(\ell) \overset{!}{=} 0 & \Rightarrow \frac{1}{2} q_0 \ell^2 + C_1 \ell \overset{!}{=} 0 \end{cases}$ (1) (1)

$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} q_0 \ell$ (1)

$$\Rightarrow \boxed{M(x) = -\left[\frac{1}{2} q_0 x^2 - \frac{1}{2} q_0 \ell x\right] = -\frac{q_0 \ell^2}{2}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{x}{\ell}\right]}$$ (1)

b) $I_y(x) = \frac{1}{12} \cdot a \cdot h^3(x)$ (1)

$h(x) = 2a\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)$ (1)

$\Rightarrow I_y(x) = \frac{a}{12} \cdot (2a)^3 \left(2 - \frac{x}{\ell}\right)^3$

$$\Rightarrow \boxed{I_y(x) = \frac{2}{3} a^4 \left(2 - \frac{x}{\ell}\right)^3}$$ (1)

c) $\sigma(x) = \frac{M(x)}{I_y(x)} \cdot z_{max}(x)$ (1)

$z_{max}(x) = \frac{1}{2} h(x) = a\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)$ (1)

$$\Rightarrow \sigma(x) = \frac{-\frac{q_0 \ell^2}{2}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{x}{\ell}\right]}{\frac{2a^4}{3}\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)^3} \cdot a\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{q_0 \ell^2}{a^3} \cdot \frac{\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{x}{\ell}}{\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)^2}$$ (1)

$\max \sigma(x) \Rightarrow \frac{d\sigma(x)}{dx} \overset{!}{=} 0$

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{3}{4} \frac{q_0 \ell^2}{a^3} \frac{d}{dx}\left[\frac{\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{x}{\ell}}{\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)^2}\right] \overset{!}{=} 0$$ (1)

$$\left\{ \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'g - g'f}{g^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow f'g - g'f \overset{!}{=} 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ell}\left[2\left(\frac{x}{\ell}\right) - 1\right]\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(2 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{-1}{\ell}\right)\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{x}{\ell}\right] \overset{!}{=} 0$$ (1)

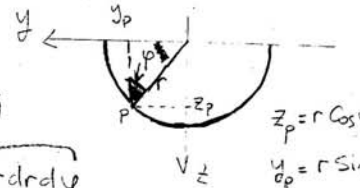
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\ell}\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)}_{\neq 0 \text{ für } 0<x<\ell} \left\{\left[2\left(\frac{x}{\ell}\right) - 1\right]\left(2 - \frac{x}{\ell}\right) + 2\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{x}{\ell}\right]\right\} \overset{!}{=} 0$$ (1)

$$\Rightarrow 4\left(\frac{x}{\ell}\right) - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell}\right) - 2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{x}{\ell}\right) - 2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{x_m = \frac{2}{3}\ell}$$ (1)

Aufgabe 3

a) $I_y = \int_A z^2\, dA$



$z_p = r\cos\varphi$
$y_p = r\sin\varphi$

1 Grenzen 1

$$= \int_0^R \int_0^\pi \overbrace{r^2\cos^2\varphi\, \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{dA}}$$

$$= \int_0^R r^3\,dr \int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \cdot \left\{ \left[\frac{\varphi}{2} + \underset{-\sin\varphi\cos\varphi}{\cancel{\ldots}}\right]_0^\pi \right\}$$

$$= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_y = \frac{1}{8}\pi R^4} \quad 1$$

$I_z = \int_A y^2\, dA$ 1

$$= \int_0^R \int_0^\pi \overbrace{r^2\sin^2\varphi}\, r\,dr\,d\varphi$$

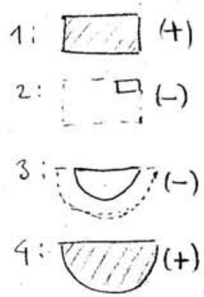
$$= \int_0^R r^3\,dr \cdot \int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi$$

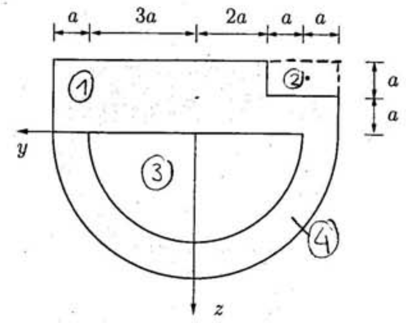
$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \cdot \left\{ \left[\frac{\varphi}{2} + \underset{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}{\cancel{\ldots}}\right]_0^\pi \right\}$$

$$= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{8}\pi R^4} \quad 1$$

b)





$$\boxed{I_y = \sum_{i=1}^{4} I_{\tilde{y}}^{(i)} + A^{(i)}\tilde{z}_{si}^2} \quad 1$$

	$\tilde{z}_{si}$	$A^{(i)}$	$A^{(i)}\cdot\tilde{z}_{si}^2$	$I_{\tilde{y}}^{(i)}$
1:	$-a$	$16a^2$	$16a^4$ 1	$\frac{16}{3}a^4$ 1
2:	$-\frac{3}{2}a$	$2a^2$	$\frac{9}{2}a^4$ 1	$\frac{1}{6}a^4$ 1
3:			1 $\{$ 0	$\frac{81}{8}\pi a^4$ 1
4:			0	$32\pi a^4$ 1

Summe: 1
Vorzeichen: 1

$$\Rightarrow I_y = \left[\frac{16}{3}a^4 + 16a^4\right] - \left[\frac{1}{6}a^4 + \frac{9}{2}a^4\right] - \left[\frac{81}{8}\pi a^4\right] + \left[32\pi a^4\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I_y = \frac{50}{3} + \frac{175}{8}\pi} \quad 1$$