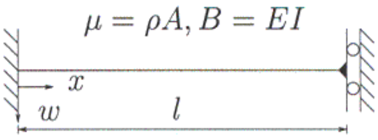
3 Schwingender Balken (10 Punkte)

Ein Balken sei links fest eingespannt und rechts durch ein Lager mit der Wand verbunden, das zwar Biegemomente, aber keine Querkräfte übertragen kann. Die zugeordnete Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}$ wird mit $\lambda = \sqrt{\frac{\Omega}{c}}$, $c^2 = \frac{B}{\mu}$ von folgendem Ansatz erfüllt:



$$w(x,t) = \Big(B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + B_3 \cos(\lambda x) + B_4 \sin(\lambda x)\Big)\Big(A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t)\Big).$$

Bei der Lösung der folgenden Aufgaben ist folgende Kurzschreibweise nützlich:

$\cosh(.) = \mathrm{ch}_{(.)}$ $\sinh(.) = \mathrm{sh}_{(.)}$ $\cos(.) = \mathrm{c}_{(.)}$ $\sin(.) = \mathrm{s}_{(.)}$ $\tan(.) = \mathrm{t}_{(.)}$ $\tanh(.) = \mathrm{th}_{(.)}$.

a) Geben Sie 2 Bedingungen an, die am linken Rand zu jeder Zeit erfüllt sind. Welcher Zusammenhang gilt zwischen B_1 und B_3? Welcher Zusammenhang gilt zwischen B_2 und B_4?

b) Geben Sie nun 2 Bedingungen (Gleichungen) an, die am rechten Rand zu jeder Zeit erfüllt sind. Ersetzen Sie darin B_3 und B_4 durch B_1 und B_2. Berechnen Sie die Summe und die Differenz der beiden Gleichungen. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte folgender Gleichung genügen: $\tan(\lambda l) + \tanh(\lambda l) = 0$.

c) Die Lösung des Randwertproblems (RWP) lautet in mit den oben erklärten Kurzschreibweise:

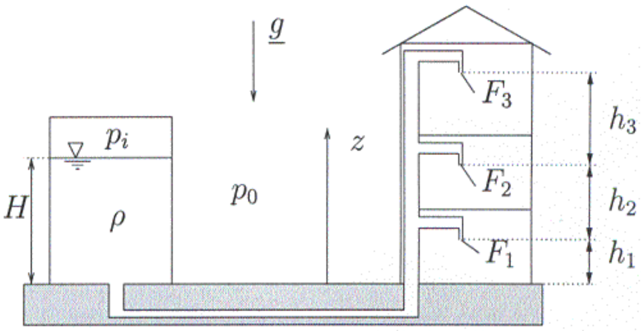
$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(B_{1_k} \mathrm{ch}_{\lambda_k x} + B_{2_k} \mathrm{sh}_{\lambda_k x} + B_{3_k} \mathrm{c}_{\lambda_k x} + B_{4_k} \mathrm{s}_{\lambda_k x}\right)\left(A_{1_k} \mathrm{c}_{\Omega_k t} + A_{2_k} \mathrm{s}_{\Omega_k t}\right) \right\}$$

Wählen Sie $B_{1_k} = \alpha$ (für alle k), und bestimmen Sie damit B_{2_k}, B_{3_k} und B_{4_k} abhängig von α und $\lambda_k l$. Bestimmen Sie nun die Eigenformen $E_k(\lambda_k l, x)$ so, dass die Lösung des RWP geschrieben werden kann als:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ E_k(\lambda_k l, x) \Big(\alpha A_{1_k} \cos(\Omega_k t) + \alpha A_{2_k} \sin(\Omega_k t)\Big) \right\}$$

4 Kessel und Wohnhaus (10 Punkte)

Ein dreigeschossiges Wohnhaus werde aus einem Kessel versorgt. Die Füllhöhe H im Kessel sei konstant. Der Luftdruck im Kessel sei p_i. Der Austrittsquerschnitt F_1 und die Höhen der Austritte h_α ($\alpha = 1, 2, 3$) seien gegeben. Die Strömung sei stationär. Das Fluid sei inkompressibel und reibungsfrei. Der Umgebungsdruck betrage $p_0 = \frac{1}{6} p_i$.
Hinweis: Entlang einer Stromlinie gilt:
$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = const.$ (BERNOULLIsche Gleichung)



a) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 abhängig von den gegebenen Größen $p_0, \rho, g, H, h_1, h_2, h_3$.

b) Wie groß müssen die Flächen F_2 und F_3 sein, damit überall derselbe Massentrom $\dot{M}$ abfließt?

c) In welcher maximalen Höhe über dem Boden z_{max} könnte gerade noch Wasser entnommen werden?