Nachklausur Mechanik III am 25.2.03, Prof. Dr. rer. nat. W.H. Müller

1/1 Semester

Bitte deutlich schreiben!

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

1 2 3 4 T	
	Σ

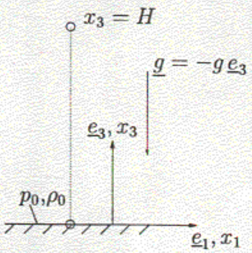
Bitte links oder rechts ankreuzen!

Ergebnis ins WWW ○ Ergebnis NICHT ins WWW ○

1 EULERsches Grundgesetz (10 Punkte)

Das EULERsche Grundgesetz der Hydrostatik lautet für den Spezialfall $\underline{f} = -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\underline{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\underline{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3}\underline{e}_3\right)$

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad} U \qquad (1)$$



a) Welche Einheit hat die Volumenkraftdichte $\underline{f}$?

b) Bestimmen Sie das Potential U so, dass $\underline{f}$ die Volumenkraftdichte der Schwerkraft ist.

c) Schreiben Sie für die vektorwertige Gleichung (1) drei partielle Differentialgleichungen. p hängt offenbar nur von x_3 ab. Wie lautet die gewöhnliche Differentialgleichung für $p(x_3)$?

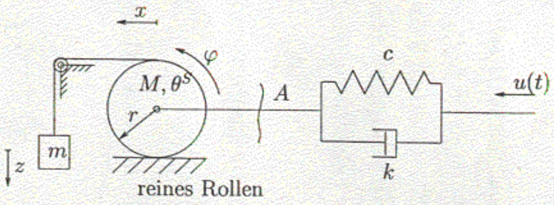
d) Integrieren Sie die Differentialgleichung zwischen $x_3 = 0$ und $x_3 = H$, um den Luftdruck $p(H)$ zu ermitteln. Am Erdboden herrsche der Druck p_0 und die Dichte ρ_0. Um $\rho(p)$ zu bestimmen, werde angenommen, dass gilt:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = const. = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \qquad \text{mit } \kappa = const. \neq 1$$

Hinweis: Die ideale Gasgleichung wird zur Lösung **nicht** benötigt. Bei der gesuchten Gleichung handelt es sich **nicht** um die barometrische Höhenformel $p(H) = p_0\, e^{-\frac{gH}{RT}}$.

2 LAGRANGEsche Gleichungen (10 Punkte)

Das skizzierte System wird rechts angetrieben mit der vorgegebenen Verschiebung $u(t)$.



a) Schneiden Sie das Gesamtsystem an der Stelle A frei, und betrachten Sie nur das System links vom Freischnitt, auf das nun bei A eine Antriebskraft F_A wirkt. Bestimmen Sie diese Antriebskraft. Hinweis: Die Kraft in einem linearen Dämpfer der Länge l berechnet sich aus $F_k = k\frac{dl}{dt}$.

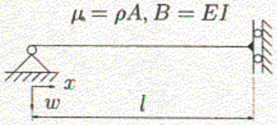
b) Berechnen Sie die kinetische Energie E_{kin} und die potentielle Energie U des Systems links. Benutzen Sie x als generalisierte Koordinate, und stellen Sie die LAGRANGE-Funktion $L = E_{kin} - U$ auf. Setzen Sie $\theta^S = \frac{1}{2}Mr^2$ ein.

c) Bestimmen Sie die generalisierte Kraft Q^*, und stellen Sie die Bewegungsgleichung mithilfe der LAGRANGEschen Gleichungen 2. Art $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q^*$ auf.

3 Kontinuumsschwingung (10 Punkte)

Ein wie skizziert gelagerter Balken führt Eigenschwingungen aus. Die zugeordnete Differentialgleichung wird mit $\lambda = \sqrt{\frac{\Omega}{c}}$, $c^2 = \frac{B}{\mu}$ von folgendem Ansatz erfüllt:

$$w(x,t) = \Big(B_1\cosh(\lambda x) + B_2\sinh(\lambda x) + B_3\cos(\lambda x) + B_4\sin(\lambda x)\Big)\Big(A_1\cos(\Omega t) + A_2\sin(\Omega t)\Big).$$



a) Geben Sie 2 Randbedingungen für den **linken** Rand an, und ermitteln Sie daraus B_1 und B_3.

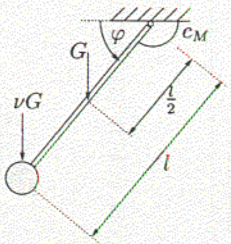
b) Geben Sie nun 2 Bedingungen für den **rechten** Rand an, und ermitteln Sie die Eigenwertgleichung sowie die zugehörigen Eigenwerte λ_k $(k = 1, 2, ..., \infty)$.

c) Zeigen Sie, dass für alle k gilt: $B_{2k} = 0$ und B_{4k} beliebig.

d) Setzen Sie $B_{4k} = 1$, und skizzieren Sie die ersten beiden Eigenformen $E_1(x)$ und $E_2(x)$.

4 PdvA (10 Punkte)

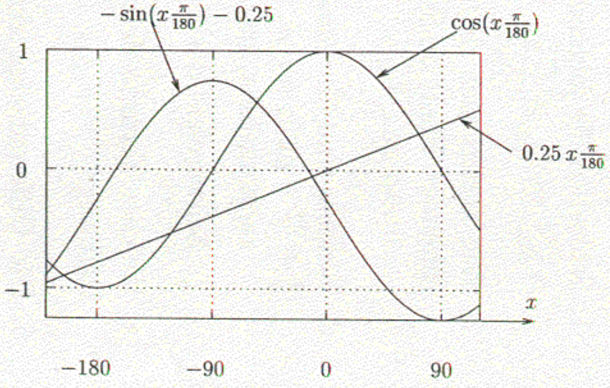
Für den starren Stab (Gewichtskraft G) mit Punktmasse (Gewichtskraft νG) und Drehfeder (Steifigkeit c_M, **entspannte** Feder bei $\boldsymbol{\varphi = 0}$) ermittle man mögliche Gleichgewichtslagen und die Art des Gleichgewichts mittels PdvA.



a) Berechnen Sie die Ortsvektoren zu den Lastangriffspunkten und deren Variationen, bestimmen Sie die virtuelle (äußere) Arbeit, und stellen Sie eine Bestimmungsgleichung für φ auf mit der Forderung $\delta A = 0$.

b) Verwenden Sie nun die unten abgebildete Skizze und die unter a) abgeleitete Bestimmungsgleichung für φ, und ermitteln Sie grafisch **näherungsweise** diejenigen Winkel φ, bei denen Gleichgewicht herrscht für den Spezialfall $c_M = \frac{1}{4}Gl$ und $\nu = \frac{1}{2}$.

c) Prüfen Sie (ebenfalls mithilfe der unten abgebildeten Skizze) für jede dieser Gleichgewichtslagen, ob es sich um ein stabiles ($\delta^2 A < 0$) oder um ein labiles ($\delta^2 A > 0$) Gleichgewicht handelt.



Theoriefragen auf der Rückseite