

Kinematik & Dynamik

- Theorie 1. Ordnung / 2. Ordnung
- Stabilitätstheorie
- Ein erstes Stabilitätsproblem
- Die Eulersche Knickgleichung

2.9. Stabilitätsprobleme
 Statisches System:



Für die Berechnung ist die Kraft auf den unverformten Körper aufgebracht.
 Theorie 1. Ordnung

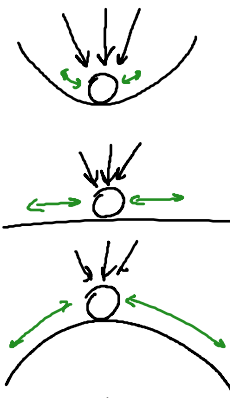


In der Realität ist die Kraft auf den deformierten Körper aufgebracht

stabiles Gleichgewicht

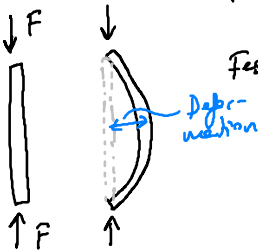
indifferentes Gleichgewicht

labiles Gleichgewicht



große Deformation (in Bezug auf die geometrischen Dimensionen)
 Die Verformung muss mitberücksichtigt werden: Theorie 2. Ordnung

Beispiel: Knicken

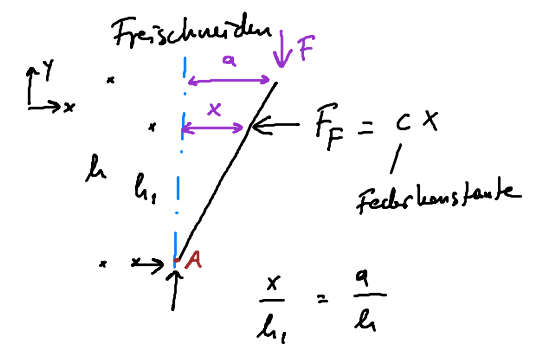
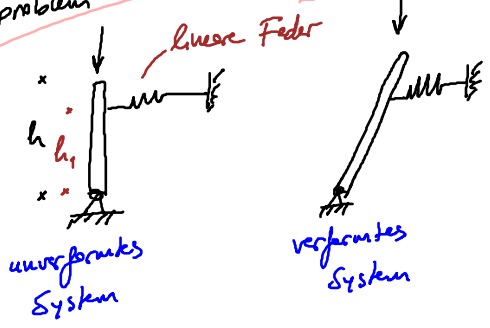


Feststellung:

- große Deformation
- Verformung ist senkrecht zur Belastung
- Verformung ist nicht proportional zur Last

2.9.2 Ein erstes Stabilitätsproblem Studieren!

Theorie 2. Ordnung
(starrer Körper)



Gleichgewicht, Statik: $\sum M^{(A)} = 0$

$$-F a + F_F l_1 = 0$$

$$-F \frac{x l_1}{l_1} + c x l_1 = 0$$

$$\left(-\frac{F l_1}{l_1} + c l_1\right) x = 0$$

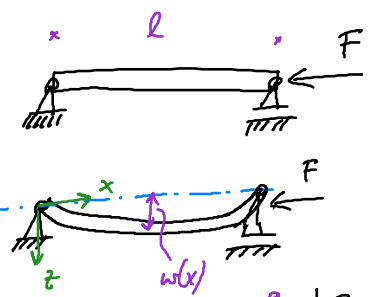
$x = 0$: Kein Knicken
 $-\frac{F l_1}{l_1} + c l_1 = 0$: Knicken

$$\frac{F l_1}{l_1} = c l_1$$

$$F = \frac{c l_1^2}{l_1} \equiv \frac{F_{\text{Krit}}}{\text{kritische Kraft}}$$

Wenn die kritische Kraft überschritten wird, verliert das System das Gleichgewicht.

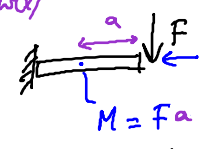
2.9.4 Die Eulersche Knickgleichung



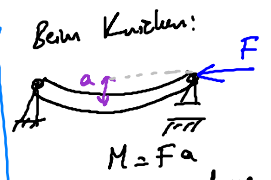
Ziel: Wie groß ist die kritische Kraft?

Biegelinien differentialgleichung: $w''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$

Zur Biegung:



Theorie 1. Ordnung
Normalkraft erzeugt kein Moment!



Theorie 2. Ordnung
Normalkraft erzeugt ein Moment!

$$M(x) = F w(x)$$

$$w'' + \frac{F}{EI} w = 0$$

α^2 , da $\frac{F}{EI} > 0$

Ziel: Löse die DGL: $w'' + \alpha^2 w = 0$

Ansatz: $w = \sin(x) \quad -\sin(x) + \alpha^2 \sin(x) = 0$
 \rightarrow Einsetzen
 $w = A \sin(\alpha x) \quad -\alpha^2 A \sin(\alpha x) + \alpha^2 A \sin(\alpha x) = 0$
 $w = B \cos(\alpha x)$ auch eine Lösung

$$w(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$$

A, B aus den Randbedingungen

$$w(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$w(x=l) = 0 \Rightarrow A \sin(\alpha l) = 0$$

Entweder $A = 0$: kein Knicken

Oder $\sin(\alpha l) = 0$: Knicken

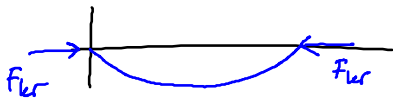
$$\sin(n\pi) = 0, \quad n \in \mathbb{N}^+ (1, 2, 3, 4, \dots)$$

$$n\pi = \alpha l$$

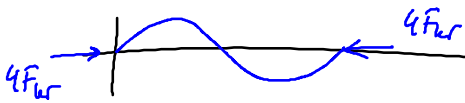
$$n^2 \pi^2 = \alpha^2 l^2 = \frac{F}{EI} l^2$$

$$F = n^2 \frac{EI \pi^2}{l^2}$$

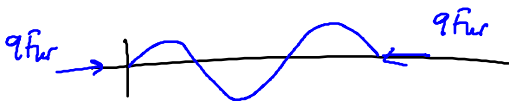
$$n=1: F_{\text{Kr}} = \frac{EI \pi^2}{l^2}$$



$$n=2: 4 F_{\text{Kr}}$$



$$n=3: 9 F_{\text{Kr}}$$



Die Kraft soll sehr schnell erhöht werden, sodass diese Fälle auftreten.