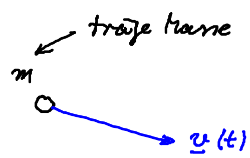
Vorlesung am 7.5.2018

- Wiederholung: Newton's Bewegungsgesetze
- Anwendungen

Wiederholung



Impuls $\underline{p}(t) := m\,\underline{v}(t)$

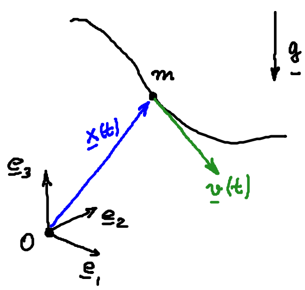
Newtonsche Bewegungsglg.: alle auf den MP wirkenden Kräfte inkl. Freischnittkräfte

$$\frac{d\underline{p}(t)}{dt} = \Sigma \underline{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\,\underline{a}(t) = \Sigma \underline{F}} \qquad \underline{a}(t) \qquad \underbrace{\Sigma \underline{F} - m\,\underline{a}(t)}_{\Sigma \tilde{\underline{F}}} = \underline{0}$$

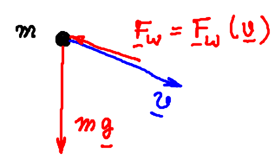
$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m\,\underline{v}(t)\right] = m\,\frac{d\underline{v}(t)}{dt} = m\,\underline{a}(t)$$

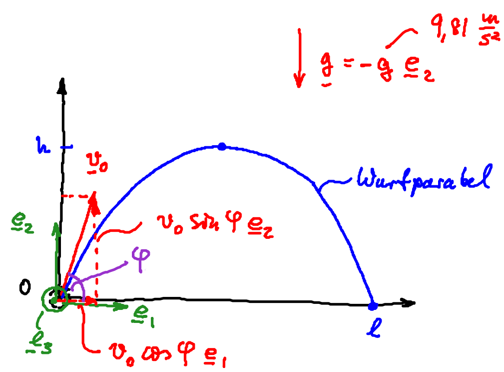
Beispiele

(a) MP im Erdschwerefeld (~~freie~~ Bewegung)



i) Freischnitt (FS)





Kinematik

ii) Gleichungen $\quad \cancel{m}\,\underline{a}(t) = \cancel{m}\,\underline{g} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}(t) = \underline{g} \qquad , \quad \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} \quad , \quad \underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$

$$\frac{d\underline{v}(t)}{dt} = \underline{g} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}(t) = \underline{g}\,t + \underline{A} \qquad , \quad AB: \ \underline{v}(t=0) = \underline{v}_0 = \underline{g}\cdot 0 + \underline{A}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \underline{v}_0$$

$$\Rightarrow \underline{v}(t) = \underline{g}\,t + \underline{v}_0$$

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{g}\,t + \underline{v}_0 \ \xRightarrow{\int dt} \ \underline{x}(t) = \frac{\underline{g}}{2}t^2 + \underline{v}_0\,t + \underline{B}$$

$$AB: \ \underline{x}(t=0) = \underline{x}_0 = \frac{\underline{g}}{2}0^2 + \underline{v}_0\,0 + \underline{B} \Rightarrow \underline{B} = \underline{x}_0$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \frac{\underline{g}}{2}t^2 + \underline{v}_0\,t + \underline{x}_0 \qquad (\#)$$

Diese Gleichung wird nun im kartesischen Koordinatensystem ausgewertet

$$\underline{x}_0 = 0\,\underline{e}_1 + 0\,\underline{e}_2 = \underline{0}$$
$$\underline{v}_0 = v_0 \cos\varphi\, \underline{e}_1 + v_0 \sin\varphi\, \underline{e}_2$$
$$\underline{g} = 0\,\underline{e}_1 - g\,\underline{e}_2$$
$$\underline{x}(t) = x_1(t)\,\underline{e}_1 + x_2(t)\,\underline{e}_2$$

$$x_1(t)\,\underline{e}_1 + x_2(t)\,\underline{e}_2 = -\frac{g}{2} t^2 \underline{e}_2 + v_0 t \cos\varphi\, \underline{e}_1 + v_0 t \sin\varphi\, \underline{e}_2$$

$\underline{e}_1(t)$: $x_1(t) = v_0 t \cos\varphi$ (1)

$\underline{e}_2(t)$: $x_2(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin\varphi$ (2)

Geschwindigkeit:

$$v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = v_0 \cos\varphi$$
$$v_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = -gt + v_0 \sin\varphi$$

Bei welcher Zeit wird $v_2(t) = 0$?
Antwort, wenn die Maximalhöhe erreicht ist! $\Rightarrow 0 = -g t_{max} + v_0 \sin\varphi$

$$\Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g} \sin\varphi \Rightarrow x_{1,max} = \frac{v_0^2}{g} \sin\varphi \cos\varphi$$

Um die Höhe h zu berechnen, setzt man diese Zeit in die Gleichung für $x_2(t)$ ein:

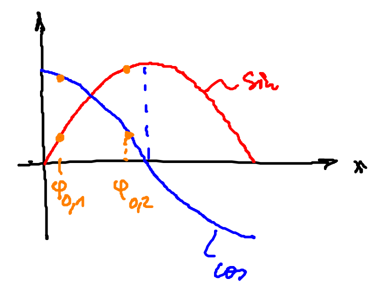
$$x_2(t_{max}) = h = -\frac{g}{2} t_{max}^2 + v_0 t_{max} \sin\varphi = -\frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2\varphi + v_0 \frac{v_0}{g} \sin^2\varphi = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi$$

Um zu sehen, daß es sich um eine Wurfparabel handelt, muß man in der sog. Parameterdarstellung der Bewegung (1), (2) den Zeitparameter eliminieren: $t = \frac{x_1}{v_0 \cos\varphi}$, das wird in (2) eingesetzt

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} x_1^2 + \frac{v_0 \sin\varphi}{v_0 \cos\varphi} x_1 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} x_1^2 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} x_1$$

das ist die Parabel

$$\Rightarrow x_2 = x_2(x_1)$$

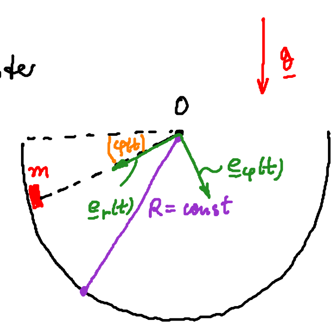


Die Wurfweite erhält man, indem man sagt

$$\ell = 2 x_1(t_{max}) = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin\varphi \cos\varphi$$

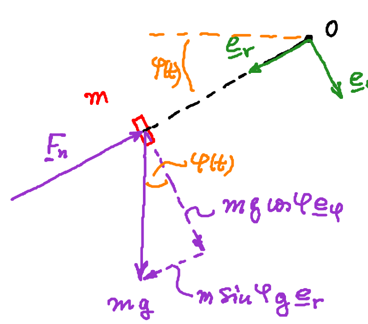
(b) geführte Bewegungen

1) Skater



$r = R$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$

i) FS



ii) Gleichungen

$$m\underline{a} = m\underline{g} + \underline{F}_n$$
$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi = -R\dot{\varphi}^2 \underline{e}_r + R\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$
$$\underline{g} = g \sin\varphi\, \underline{e}_r + g \cos\varphi\, \underline{e}_\varphi$$
$$\underline{F}_n = -F_n \underline{e}_r$$

$$\Rightarrow m[-R\dot{\varphi}^2 \underline{e}_r + R\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi] = m[g \sin\varphi\, \underline{e}_r + g\cos\varphi\, \underline{e}_\varphi] - F_n \underline{e}_r$$

$\underline{e}_r$: $-mR\dot{\varphi}^2 = mg\sin\varphi - F_n \Rightarrow F_n = mg \sin\varphi + mR\dot{\varphi}^2$ (1)

e_φ : $\cancel{m} R \ddot{\varphi} = \cancel{m} g \cos\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{R} \cos\varphi(t)$ (2)

Um (2) zu lösen multiplizieren wir mit $\dot{\varphi}(t)$ durch

$$\ddot{\varphi}(t)\,\dot{\varphi}(t) = \frac{g}{R} \cos\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}(t)\dot{\varphi}(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{2g}{R}\sin\varphi(t)\right] \Rightarrow \dot{\varphi}^2(t) = \frac{2g}{R}\sin\varphi(t) + A$$

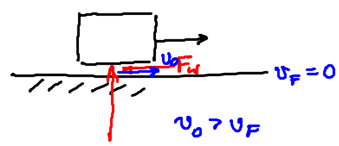
$\Downarrow$

AB : $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}^2(t) = \frac{2g}{R}\sin\varphi(t)$

$$\dot{\varphi}^2(t) = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

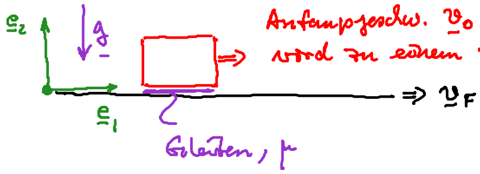
$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{R}}\sin^{1/2}\varphi(t) \Rightarrow \frac{d\varphi}{\sin^{1/2}\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{R}}\,dt$$

$$\Rightarrow t = \int_{\tilde{\varphi}=0}^{\tilde{\varphi}=\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sin^{1/2}\tilde{\varphi}}$$



(c) Reibung

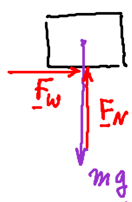
Förderband



Anfangsgeschw. v_0 wird zu einem $v(t)$, das langsam auf v_F ansteigt

Frage: Wie lange dauert der Beschleunigungsprozeß?

i) FS



ii) Coulombreibung : $F_W = \mu F_N$

Newton : $m\underline{a} = \sum \underline{F} = \underline{F}_W + \underline{F}_N + m\underline{g}$

$\underline{a} = \ddot{x}_1 \underline{e}_1 + \ddot{x}_2 \underline{e}_2 = \ddot{x}_1 \underline{e}_1$ kin. Nebenbedingungen $x_2 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $\ddot{x}_2 = 0$

$\underline{F}_W = F_W \underline{e}_1$

$\underline{F}_N = F_N \underline{e}_2$

$m\underline{g} = -mg\,\underline{e}_2$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 \underline{e}_1 = F_W \underline{e}_1 + F_N \underline{e}_2 - mg\,\underline{e}_2$$

e_1 : $\cancel{m}\ddot{x}_1 = F_W = \mu F_N = \mu \cancel{m} g$ (1)

e_2 : $0 = F_N - mg \Rightarrow F_N = mg$

(1) $\Rightarrow \dot{x}_1 = \mu g t + A_1$ AB : $\dot{x}_1(t=0) = v_0 = 0 + A_1$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \mu g t + v_0$$

Wann ist die Kiste auf v_F durch die Reibung beschleunigt worden?

$$\Rightarrow v_F = \mu g t_f + v_0 \Rightarrow t_f = \frac{v_F - v_0}{\mu g}$$