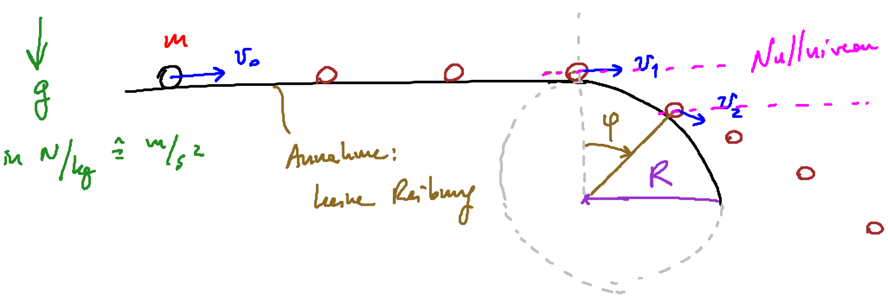
Kinematik & Dynamik, große Übung 05, 2018.05.31

- Beispiele mit dem Energiesatz
- Kraftstoß

Tutoriumsaufgabe

a) Berechne den Ablösewinkel

b) Wie groß ist v_0, sodass der Ball bei $\varphi = 0$ ablöst?



Lösung: Impulssatz

Summe aller Kräfte = Trägheitsterm

F_N Normallast,

$F_N = 0$, der Ball hebt!

Zwangsbedingung

Heute: Lösung mit dem Energiesatz!

keine Reibung, keine Dissipation

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{E^{kin} + E^{pot}}_{E^{ges}}\Big) = 0 \qquad \Big|\int dt$$

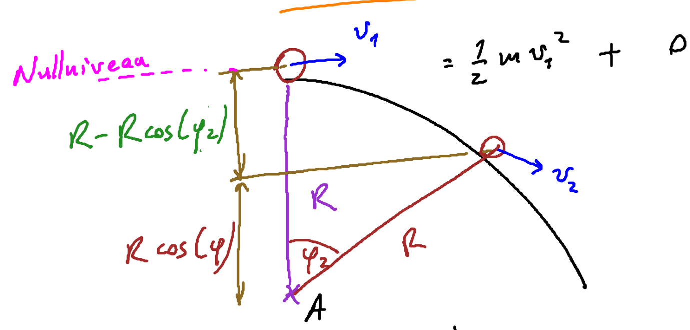
$$\int_1^2 d\,E^{ges} = 0$$

$$E_2^{ges} - E_1^{ges} = 0$$

$$E_2^{ges} = E_1^{ges}$$

$$E_2^{kin} + E_2^{pot} = E_1^{kin} + E_1^{pot}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - mg\,\big(R - R\cos(\varphi_2)\big) = \frac{1}{2} m v_1^2 + 0$$



Initialgeschwindigkeit: $v_0 = v_1$ (keine Reibung)

$\hookrightarrow v_1 = R\,\dot{\varphi}_1$ } solange m sich nicht abhebt, ist

$$v_2 = R\dot{\varphi}_2 \quad \Big\}$$ die Bewegung rotatorisch um den Punkt A

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - mg\left(R - R\cos(\varphi_2)\right) = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} R^2 \dot{\varphi}_2^2 - \cancel{m} g R + \cancel{m} g R\cos(\varphi_2) = \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2$$

φ_2 : Wenn der Massenpunkt die Bahn , $m\underline{a} = \underline{F}$

$$m a_r = -mg\cos(\varphi_2)$$

aus dem Freischnitt $F_N = 0$

gleich! $\Big\{ -mR\dot{\varphi}_2^2$

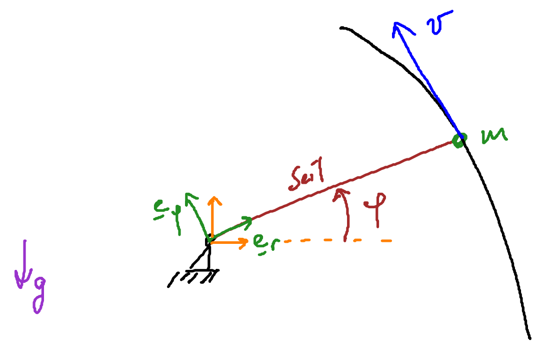
$$R\dot{\varphi}_2^2 = g\cos(\varphi_2)$$

$$\frac{1}{2} R g\cos(\varphi_2) - gR + gR\cos(\varphi_2) = \frac{1}{2} v_0^2$$

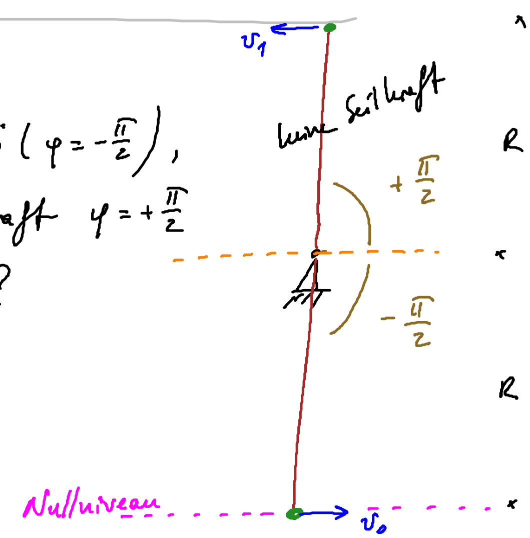
$$\cos(\varphi_2)\underbrace{\left(\frac{Rg}{2} + Rg\right)}_{\frac{3}{2}Rg} = \frac{1}{2} v_0^2 + gR$$

$$\varphi_2 = \underset{\cos^{-1}}{\arccos}\left(\frac{v_0^2}{3Rg} + \frac{2}{3}\right)$$

Aufgabenbuch 3.1.5 Dynamik des Schleuderballs



Wie groß ist $\dot{\varphi}(\varphi = -\frac{\pi}{2})$, wenn die Seilkraft $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ erlöschen soll?



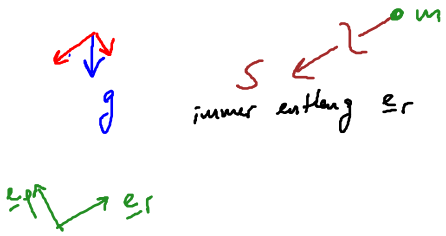
$$\underline{x} = r\,\underline{e}_r$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\ddot{\underline{x}} = \dot{\underline{v}} = \underline{a} = \ddot{r}\,\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\underline{e}_r$$

$$= (\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\varphi}^2)\,\underline{e}_r + (2\cancel{\dot{r}}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\underline{e}_\varphi$$

Seil wird nicht länger/kürzer $\quad r = R, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0$



$$m\underline{a} = \underline{S} + m\underline{g}$$

Zustand 1: $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ $\quad S = 0$

$$\underline{e}_r: \quad m(-r\dot{\varphi}^2) = S - mg\sin(\varphi)$$

Zustand 1: $\quad -mr\dot{\varphi}_1^2 = 0 - mg\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Aufforderung: $\quad \boxed{\dot{\varphi}_1^2 = \frac{g}{r}}$

Seillänge $r = R$

Annahme: keine Reibung: $\quad E_0^{ges} = E_1^{ges}$

$$E_0^{kin} + E_0^{pot} = E_1^{kin} + E_1^{pot}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + 0 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}g\,2R$$

$$v_0^2 = v_1^2 + 4gR \quad , \quad v_0 = R\dot{\varphi}_0 \quad , \quad v_1 = R\dot{\varphi}_1$$

$$R^2\dot{\varphi}_0^2 = R^2\dot{\varphi}_1^2 + 4gR$$

$$R^2\dot{\varphi}_0^2 = R^{\cancel{2}}\frac{g}{\cancel{R}} + 4gR$$

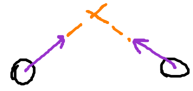
$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{5g}{R}}$$

<u>Stoß</u>:

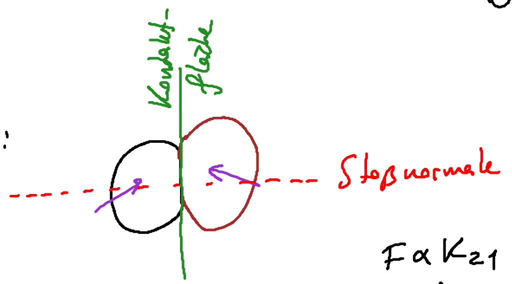
zentrischer Stoß: 

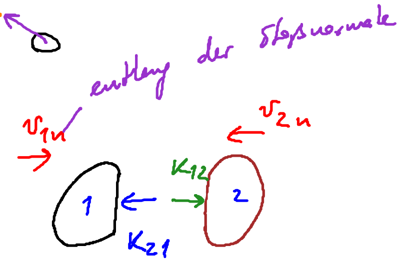
exzentrischer Stoß: 

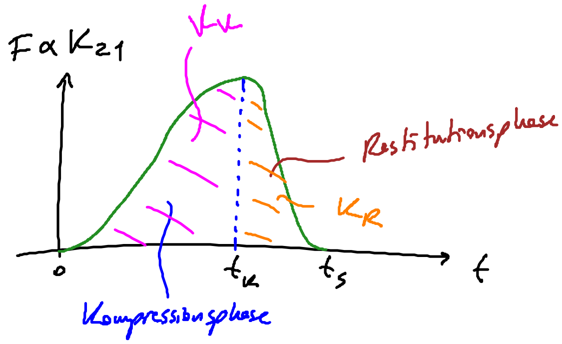
schiefer Stoß:



Beim Stoß:







$$K_K = \int F\,dt$$

$$K_R = \int F\,dt$$

$$e = \frac{K_R}{K_K}$$

Impulserhaltung während der Kompressionsphase

$$m_1 v_{1n}(t_K) - m_1 v_{1n}(0) = -K_K \qquad (1)$$

$$m_2 v_{2n}(t_K) - m_2 v_{2n}(0) = +K_K \qquad (2)$$

$$v_{1n}(t_K) = v_{2n}(t_K)$$

aus (1) aus (2)

$$\frac{-K_K + m_1 v_{1n}(0)}{m_1} = \frac{K_K + m_2 v_{2n}(0)}{m_2}$$

$$v_{1n}(0) - v_{2n}(0) = K_K \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)$$

$$\boxed{K_K = \frac{m_1 m_2 \left(v_{1n}(0) - v_{2n}(0)\right)}{m_1 + m_2}}$$

Impulserhaltung während der Restitutionsphase

$$m_1 v_{1n}(t_S) - m_1 v_{1n}(t_K) = -K_R \qquad (3)$$

$$m_2 v_{2n}(t_S) - m_2 v_{2n}(t_K) = +K_R \qquad (4)$$

$$v_{1n}(t_K) = v_{2n}(t_K)$$

aus (3) aus (4)

$$\frac{K_R + m_1 v_{1n}(t_S)}{m_1} = \frac{-K_R + m_2 v_{2n}(t_S)}{m_2}$$

$$K_R\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = -v_{1n}(t_S) + m_2 v_{2n}(t_S) \longrightarrow \boxed{K_R = \frac{m_1 m_2 \left(v_{2n}(t_S) - v_{1n}(t_S)\right)}{m_1 + m_2}}$$

$$e = \frac{K_R}{K_K} = \begin{cases} 1, & \text{elastischer Stoß} \\ < 1: & \text{plastischer Stoß} \end{cases}$$