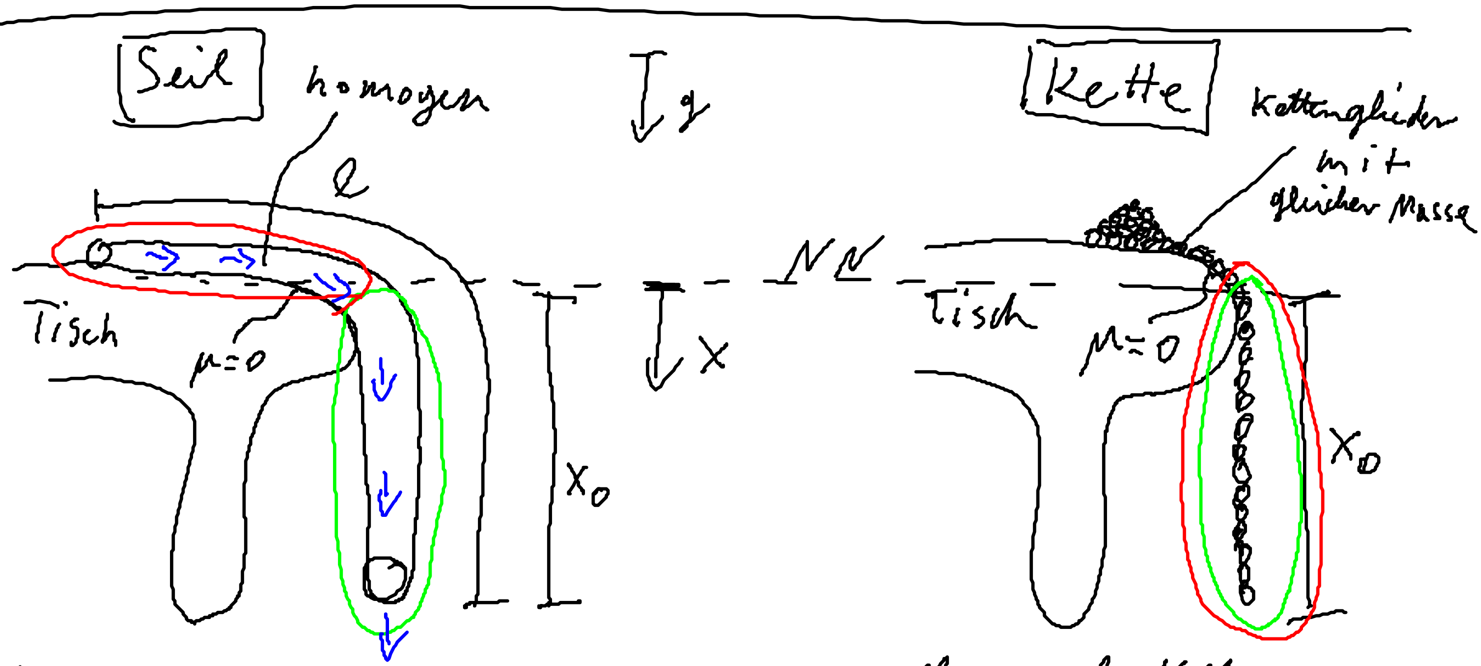
Übung 6

7.6.18

- Lehrevaluation:

  https://befragung.tu-berlin.de/evasys/
  online.php?p=G9EYA

- Aufgabe 3.2.3: fallendes Seil & fallende Kette



geg: $\mu = 0$; $x_0 = x(t=0)$,

$$\rho_S = \frac{\text{Masse d. Seils}}{\text{Länge}}$$

M = Masse d. Seils

l = Länge d. Seils

$$\rho_K = \frac{\text{Masse der Kette}}{\text{Länge}}$$

m_K = Masse d. Kette

ges: a) DGL, bei der die Position des tiefsten Punktes als Funktion von der Zeit t dargestellt wird $\rightarrow x(t)$

b) Energieverlust in beiden Fällen

2. GG NEWTON:

$$\frac{d}{dt}\left(p_S(t)\right) = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_S(t) \cdot v(t)\right) = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_K(t)\right) = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_K(t) \cdot v(t)\right) = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(M \cdot \dot{x}(t)\right) = m_S(t) \cdot g$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\rho_S \cdot l}_{\text{gesamte Seilmasse in Bewegung}} \cdot \dot{x}(t)\right) = \underbrace{\rho_S \cdot x(t)}_{\text{nur der Teil der Kettenmasse, der über den Tisch hängt, dient als Antriebskraft}} \cdot g$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_S \cdot l \cdot \dot{x}(t)\right) = \rho_S \cdot x(t) \cdot g$$

$$\cancel{\rho_S} \cdot l \; \ddot{x}(t) = \cancel{\rho_S} \cdot g \cdot x(t)$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) - \frac{g}{l} \cdot x(t) = 0}$$

homogene lineare DGL

$$\frac{d}{dt}\left(m_K(t) \cdot \dot{x}(t)\right) = m_K(t) \cdot g$$

$$\underbrace{\dot{m}_K(t)}_{\rho_K \cdot \dot{x}(t)} \cdot \dot{x}(t) + \underbrace{m_K(t)}_{\rho_K \cdot x(t)} \cdot \ddot{x}(t) = \underbrace{m_K(t)}_{\rho_K \cdot x(t)} \cdot g$$

$$\cancel{\rho_K}\left(\dot{x}(t)\right) \cdot \dot{x}(t) + \cancel{\rho_K}\left(\ddot{x}(t) \cdot x(t)\right) = \cancel{\rho_K}\, x(t) \cdot g$$

$$\dot{x}(t)^2 + x(t) \cdot \ddot{x}(t) = x(t) \cdot g$$

$$\boxed{x(t) \cdot \ddot{x}(t) + \dot{x}(t)^2 - g \cdot x(t) = 0}$$

homogene nicht-lineare DGL

Lösen der DGL

Seil: $\ddot{x}(t) = \frac{g}{l} \cdot x(t) \quad | \cdot \dot{x}(t)$

$$\ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) = \frac{g}{l} \cdot x(t) \cdot \dot{x}(t) \quad | \text{ Äquivalent}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2(t)}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{l} \cdot \frac{x^2(t)}{2}\right) \quad | \text{ überprüfung in NR}$$

NR: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{l} \; \frac{x \cdot x}{2}\right) \quad | \text{ ableiten (Produktregel)}$

$$\frac{\ddot{x}\cdot\dot{x}+\dot{x}\cdot\ddot{x}}{2} = \frac{g}{l}\,\frac{\dot{x}\cdot x + x\cdot\dot{x}}{2}$$

$$\frac{\cancel{2}\,\ddot{x}\cdot\dot{x}}{\cancel{2}} = \frac{g}{l}\,\frac{\cancel{2}\,x\dot{x}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2(t)}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{l}\,\frac{x^2(t)}{2}\right) \quad \Big|\cdot dt$$

$$d\left(\frac{\dot{x}^2(t)}{2}\right) = d\left(\frac{g}{l}\,\frac{x^2(t)}{2}\right) \quad \Big|\int$$

$$\int_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t)} 1\, d\left(\frac{\tilde{\dot{x}}^2(t)}{2}\right) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} 1\, d\left(\frac{g}{l}\,\frac{\tilde{x}^2(t)}{2}\right)$$

$$\frac{\tilde{\dot{x}}^2}{2}\Bigg|_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t)} = \frac{g}{l}\,\frac{\tilde{x}^2(t)}{2}\Bigg|_{x(t_0)}^{x(t)} \quad \Big|\ \text{Grenzen Einsetzen}$$

$$\frac{\dot{x}^2(t)}{2} - \cancel{\frac{\dot{x}^2(t_0)}{2}}^{\to 0} = \frac{g}{l}\left(\frac{x^2(t)}{2} - \frac{x^2(t_0)}{2}\right) \quad \Big|\ \dot{x}(t_0)=0$$

(Anfangsgeschw. null ist)

$$\dot{x}^2(t) = \frac{g}{l}\left(x^2(t) - x^2(t_0)\right) \quad \Big|\sqrt{}$$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{x^2(t) - x^2(t_0)} \quad \Big|\ \dot{x}(t) = \frac{x(t)}{dt}\cdot\frac{dx}{dx}$$

(Trennung d. Variablen)

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{x^2(t)-x^2(t_0)} \quad \Big|\ \text{Umformung}$$

$= 1$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2(t) - x^2(t_0)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot dt \quad \Big| \text{ Integration mit Stammfkt.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - x_0^2}\right) + C$$

$\vdots$

Lsg:

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{2}\left[e^{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t}\right]}$$

Lösen der DGL:

Kette

$$\dot{x}^2(t) + x(t) \cdot \ddot{x}(t) = g \cdot x(t) \quad \Big| \text{ Substitution: } x = +\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow u = x^2 = x \cdot x$$

$$\dot{u} = \dot{x} \cdot x + x \cdot \dot{x} = 2x \cdot \dot{x}$$

$$\ddot{u} = \ddot{x} \cdot x + \dot{x} \cdot \dot{x} + \dot{x} \cdot \dot{x} + x \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{u} = 2(\dot{x}^2 + x \cdot \ddot{x})$$

$$\frac{1}{2}\ddot{u} = g \cdot \sqrt{u} \quad | \cdot 2\dot{u}$$

$$\ddot{u} \cdot \dot{u} = g\sqrt{u} \cdot 2\dot{u} \quad | \text{ Äquivalent}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{u}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(g\left(\frac{4}{3}\underbrace{\sqrt{u^3}}_{u^{3/2}}\right)\right) \quad \Big| \cdot dt \quad \Big| \int$$

$$\int_{\dot{u}(0)}^{\dot{u}(t)} 1\, d\left(\frac{1}{2}\tilde{\dot{u}}^2\right) = \frac{4}{3}g \int_{u(0)}^{u(t)} 1\, d\left(\tilde{u}^{3/2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\tilde{\dot{u}}^2 \Big|_{\dot{u}(0)}^{\dot{u}(t)} = \frac{4}{3} g\, \tilde{u}^{3/2} \Big|_{u(0)}^{u(t)} \quad \Big| \text{ Grenzen einsetzen}$$

$$\frac{1}{2}\dot{u}(t)^2 - \frac{1}{2}\cancel{\dot{u}(0)^2}^{\,0} = \frac{4}{3}g\left[u(t)^{3/2} - u(0)^{3/2}\right] \quad \Big|\ \dot{u}(0) = 0 \quad \Big| \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{u}(t)^2 = \frac{8}{3}g\left(u(t)^{3/2} - u(0)^{3/2}\right) \quad \Big|$$ Resubstitution:

$$u = x^2$$

$$u(0) = u_0 = x_0$$

$$\dot{u} = 2x\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x\dot{x})^2 = \frac{8}{3}g\left(x^{2\cdot 3/2} - x_0^{2\cdot 3/2}\right) \quad \Big|\ :(2x)^2$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{3}g\left(x - \frac{x_0^3}{x^2}\right) \quad \Big|\ \sqrt{}$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{3}g}\sqrt{x - \frac{x_0^3}{x^2}} \quad \Big|$$ Trennung d. Var.: $\dot{x} = \frac{x}{dt}\cdot\frac{dx}{dx}$

$$\underbrace{\frac{x}{dx}}_{=1}\cdot\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}g}\sqrt{x - \frac{x_0^3}{x^2}} \quad \Big|$$ $\Rightarrow$ numerische Lösung mit Hilfe von elliptischen Integralen

$$\vdots$$

$$x(t) = \dots$$

b) Energie d. Seils:

$$E_{ges_{Seil}}(t) = \underbrace{E_{kin_{Seil}}}_{\text{komplettes Seil in Bewegung}}(t) + \underbrace{E_{pot_{Seil}}}_{\text{Anteil, der herunterhängenden Masse}}(t)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t) + m_S(t) \cdot g \cdot \underset{\approx \frac{x(t)}{2}}{h}$$ → Gewicht des herunterhängenden Seiles greift am Schwerpkt. an

$$= \frac{1}{2} \rho_S \cdot l \; \dot{x}^2(t) - \rho_S \cdot x(t) \cdot g \cdot \frac{x(t)}{2}$$

$\dot{x}(t)$ und $x(t)$ einsetzen:

$$\Rightarrow E_{ges_{Seil}}(t) = \frac{1}{2} \rho_S \cdot l \left(\overbrace{\frac{g}{l}\left(x^2(t) - x_0^2\right)}^{\dot{x}^2(t)} \right) - \rho_S \cdot \frac{g}{2} \; \overbrace{\frac{x_0}{4}\left[e^{\sqrt{\dots}} + e^{-\sqrt{\dots}}\right]^2}^{x^2(t)}$$

$$\overset{!}{=} -\frac{1}{2} \rho_S \cdot g \cdot x_0^2$$

$\Rightarrow$ Energie ist unabhängig von der Zeit

$\Rightarrow$ Energieerhaltung liegt vor

<u>Energie d. Kette:</u>

$$E_{ges_{Kette}}(t) = E_{Kin_{Kette}}(t) + E_{Pot_{Kette}}(t)$$

$$= \frac{1}{2} m_K(t) \cdot \dot{x}^2(t) - m_K(t) \cdot g \cdot \underset{\approx x/2}{h}$$

$$= \frac{1}{2} \rho_K \cdot x(t) \; \dot{x}^2(t) - \rho_K \cdot x(t) \cdot g \cdot \frac{x(t)}{2}$$

mit $\dot{x}(t)$ u. $x(t)$ folgt:

$$E_{ges} = \frac{1}{2} \rho_K \, x(t) \cdot \underbrace{\frac{2}{3} g \left(x(t) - \frac{x_0^3}{x(t)}\right)}_{\dot{x}^2(t)} - \rho_K \cdot \frac{g}{2} \cdot x^2(t)$$

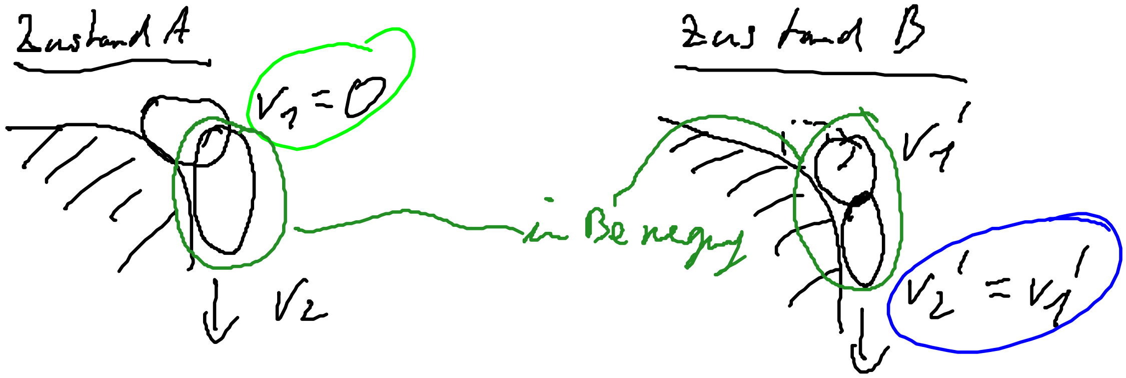
$$= \frac{1}{2} \rho_K \cdot g \left[\frac{2}{3}\left(x^2(t) - \frac{x_0^3}{x(t)}\right) - x^2(t) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \rho_K \cdot g \left[-\frac{1}{3} x^2(t) - \frac{2}{3} \frac{x_0^3}{x} \right]$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{\rho_K \cdot g}{x(t)}\left(x(t)^3 + 2x_0^3\right) < 0 \neq \text{const}$$

$\Rightarrow$ Energieverlust hängt v. d. Zeit ab

- auf der Stöße dissipiert Energie ($\dot{E}_{ges} < 0$)
- die Energie nimmt ab wegen des inelast. Stoßprozesses der Kettenglieder



da keine ext. Kräfte wirken, muss die Impulserhaltung gelten:

$$p_A \overset{!}{=} p_B$$

$$m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = m \cdot v_1' + m \cdot v_2'$$

$$0 + m \cdot v_2 = m \cdot v_1' + m \cdot v_1'$$

$$v_2 = 2 v_1'$$

$$\Rightarrow \underline{v_1' = \frac{1}{2} v_2}$$

Energieverlust berechnen mit Hilfe der kin. Energie:

$$\Delta E = (E_{kin})' - E_{kin} = \frac{1}{2}(2m)(v_1')^2 - \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$= m\left(\frac{1}{2} v_2\right)^2 - \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$= -\frac{1}{4} m v_2^2$$

$\hat{=}$ Energieverlust im plast. Stoß-vorgang zweier Kettenglieder