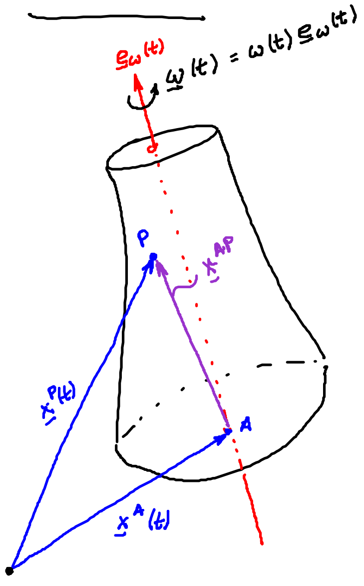
Vorlesung am 8.6.2018

- Wiederholung: Eulersche Starrkörperkinematik
- Momentanpol, Rastpolbahn, Gangpolbahn
- Beispiele

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}\;\underline{a}\cdot\underline{c} - \underline{c}\;\underline{a}\cdot\underline{b}$$

Wiederholung

3D



Eulersche Kinematikgleichung

$$\underline{x}^P(t) = \underline{x}^A(t) + \underline{x}^{AP}(t) \quad \Big|\ \frac{d}{dt} \qquad \frac{d\underline{x}^P(t)}{dt} = \underline{v}^P(t)$$

$$\underline{v}^P(t) = \underline{v}^A(t) + \underline{\omega}(t)\times\underline{x}^{AP}(t) \quad \Big|\ \frac{d}{dt} \qquad \frac{d\underline{v}^P(t)}{dt} = \underline{a}^P(t)$$

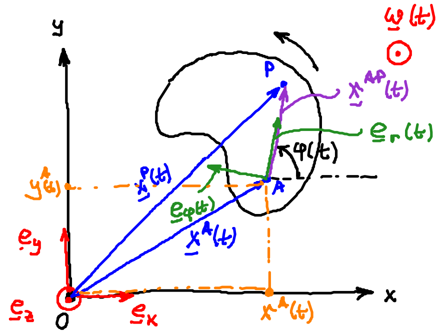
$$\underline{a}^P(t) = \underline{a}^A(t) + \dot{\underline{\omega}}(t)\times\underline{x}^{AP}(t) + \underbrace{\underline{\omega}(t)\times\left(\underline{\omega}(t)\times\underline{x}^{AP}\right)}_{\underline{\omega}(t)\;\underline{\omega}\cdot\underline{x}^{AP} - \underline{x}^{AP}\,\omega^2(t)}$$

$\underline{\omega}(t)\cdot\underline{\omega}(t)$

$$\frac{d}{dt}\underline{e}_r(t) = \dot\varphi(t)\,\underline{e}_\varphi(t), \qquad \frac{d\underline{e}_\varphi(t)}{dt} = -\underbrace{\dot\varphi(t)}_{\omega(t)}\,\underline{e}_r(t)$$

$$\underline{\omega}(t) = \omega(t)\,\underline{e}_z = \dot\varphi(t)\,\underline{e}_z \Rightarrow \dot{\underline{\omega}}(t) = \ddot\varphi(t)\,\underline{e}_z$$

2D



$$\underline{x}^P(t) = \underline{x}^A(t) + \underline{x}^{AP}(t) = \underline{x}^A(t) + |\underline{x}^{AP}|\,\underline{e}_r(t)$$

$$\underline{v}^P(t) = \underline{v}^A(t) + \underline{\omega}(t)\times\underline{x}^{AP}(t) = \underline{v}^A(t) + |\underline{x}^{AP}|\frac{d\underline{e}_r}{dt} = \underline{v}^A(t) + |\underline{x}^{AP}|\,\dot\varphi(t)\,\underline{e}_\varphi \quad (1)$$

$$\left(\dot\varphi(t)\,\underline{e}_z\right)\times\left(|\underline{x}^{AP}|\,\underline{e}_r(t)\right) = \dot\varphi(t)\,|\underline{x}^{AP}|\,\underbrace{\underline{e}_z\times\underline{e}_r(t)}_{\underline{e}_\varphi(t)}$$

$$\underline{a}^P(t) = \underline{a}^A(t) + \dot{\underline{\omega}}(t)\times\underline{x}^{AP}(t) + \overbrace{\underline{\omega}(t)\;\underline{\omega}\cdot\underline{x}^{AP}}^{2D\,=\,\underline{0}} - \underline{x}^{AP}\,\omega^2(t) =$$

$$= \underline{a}^A(t) + \left(\ddot\varphi(t)\,\underline{e}_z\right)\times|\underline{x}^{AP}|\,\underline{e}_r(t) - \dot\varphi^2(t)\,|\underline{x}^{AP}|\,\underline{e}_r(t)$$

$$= \underline{a}^A(t) + |\underline{x}^{AP}|\,\ddot\varphi(t)\,\underline{e}_\varphi(t) + \underbrace{|\underline{x}^{AP}|\,\dot\varphi(t)\left(-\dot\varphi(t)\,\underline{e}_r(t)\right)}_{-|\underline{x}^{AP}|\,\dot\varphi^2(t)\,\underline{e}_r(t)}$$

$\frac{d}{dt}(1)$

Komponentenform der 2D Gleichungen:

$$x^P(t) = x^A(t) + r\cos\varphi(t), \qquad r = |\underline{x}^{AP}|$$

$$y^P(t) = y^A(t) + r\sin\varphi(t)$$

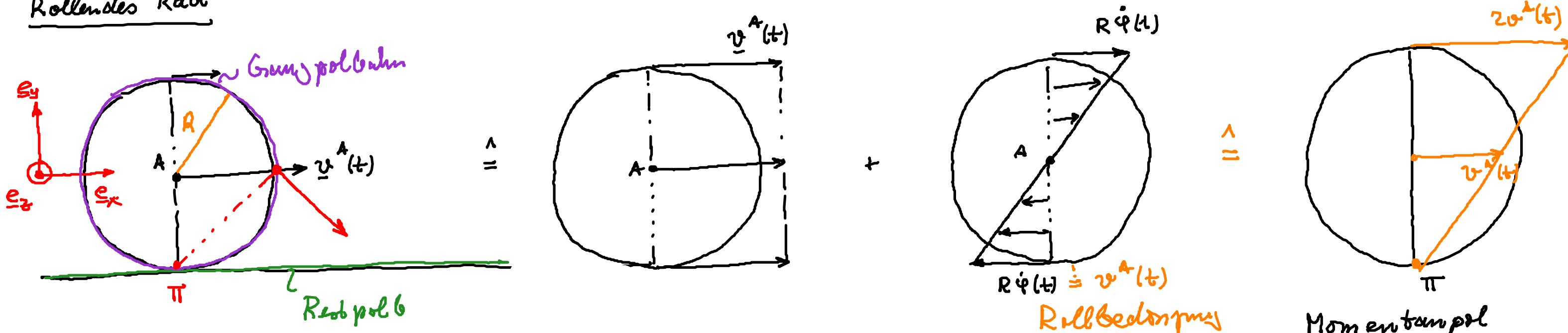
$$v_x^P(t) = v_x^A(t) - r\dot\varphi(t)\sin\varphi(t)$$

$$v_y^P(t) = v_y^A(t) + r\dot\varphi(t)\cos\varphi(t)$$

$$\begin{matrix}a_x^P(t)\\ a_y^P(t)\end{matrix} \begin{matrix}=\\=\end{matrix} \underbrace{\begin{matrix}a_x^A(t)\\ a_y^A(t)\end{matrix}}_{\underline{a}^A(t)} \underbrace{\begin{matrix}-r\ddot\varphi(t)\sin\varphi(t)\\ +r\ddot\varphi(t)\cos\varphi(t)\end{matrix}}_{\underline{a}_\varphi^{AP}(t)} \underbrace{\begin{matrix}-r\dot\varphi^2(t)\cos\varphi(t)\\ -r\dot\varphi^2\sin\varphi(t)\end{matrix}}_{\underline{a}_r^{AP}(t)}$$

Rollendes Rad

reine Translation reine Drehung



Punkt der momentanen Ruhe;
Punkt um den sich der Starrkörper momentan abrollt ohne zu translatieren

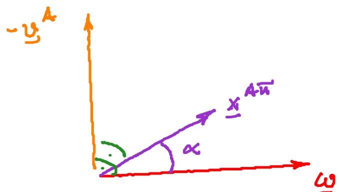
Mathematische Behandlung des Momentanpols

$$\underbrace{\cancel{\underline{v}^\pi}}_{=\underline{0} \text{ für einen Momentanpol}} = \underline{v}^A(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{x}^{A\pi}(t) \Rightarrow -\underline{v}^A = \underline{\omega} \times \underline{x}^{A\pi} \quad (1)$$

Nach den Regeln des Kreuzproduktes heißt das

(a) $-\underline{v}^A$ steht senkrecht auf $\underline{\omega}$ und (dem gesuchten Vektor) $\underline{x}^{A\pi}$

(b) Dreht man mit der rechten Hand $\underline{\omega}$ auf $\underline{x}^{A\pi}$, so zeigt $-\underline{v}^A$ in Richtung des Daumens oder so



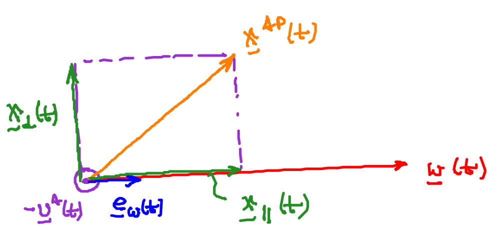
Nehmen wir einmal an, wir kennen $\underline{\omega}$ und $-\underline{v}^A$, können wir dann $\underline{x}^{A\pi}$ berechnen?

$\Rightarrow$ Wir müssen (1) nach $\underline{x}^{A\pi}$ auflösen; geht das?

Erinnere $\underline{\omega}(t) = \omega(t)\, \underline{e}_\omega(t)$
↖ Einheitsvektor in Richtung der momentanen Drehachse

Schreibe $\underline{x}^{A\pi} = \underline{x}_\parallel^{A\pi} + \underline{x}_\perp^{A\pi}$

in Richtung $\underline{e}_\omega(t)$ ↗ ↖ senkrecht zu $\underline{e}_\omega(t)$



In (1) einsetzen:

$$-\underline{v}^A = \underline{\omega} \times \underline{x}^{A\pi} = \underline{\omega} \times \big(\underbrace{\cancel{\underline{x}_\parallel^{A\pi}}}_{=\underline{0}} + \underline{x}_\perp^{A\pi}\big)$$
$$= \underline{\omega} \times \underline{x}_\perp^{A\pi}$$

Zur Auflösung von $\underline{x}_\perp^{A\pi}$ multipliziere ich die Gleichung $\underline{e}_\omega \times$

$$-\underline{e}_\omega \times \underline{v}^A = \underline{e}_\omega \times (\underline{\omega} \times \underline{x}_\perp^{A\pi}) = \omega\, \underbrace{\underline{e}_\omega \cdot \underline{x}_\perp^{A\pi}}_{=0} - \underline{x}_\perp^{A\pi}\, \underbrace{\underline{e}_\omega \cdot \underline{\omega}}_{\underline{e}_\omega \cdot (\omega(t)\, \underline{e}_\omega(t))}$$

$|\underline{e}_\omega \times \underline{v}^A| = |\underline{v}^A|$

$= \omega(t)\,1$

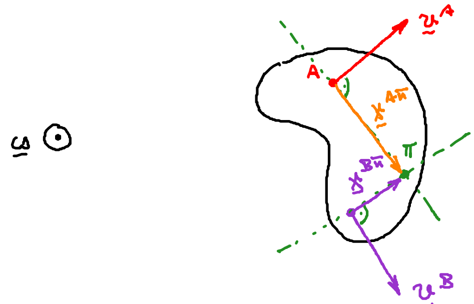
$$\Rightarrow \quad |\underline{x}_{\perp}^{A\Pi}| = \frac{|\underline{v}|^A}{\omega(t)}$$

Achtung: Der Momentanpol kann aber muss nicht ein Starrkörperpunkt sein

Def.: Rastpolbahn (fixed centrode, herpolhode) = Gesamtheit aller Raumpunkte im (raumfesten) Inertialsystem, die bei einer Starrkörperbewegung jemals Momentanpol sein können

Gangpolbahn (moving centrode, polhode) = Kurve auf der alle Partikel des Starrkörpers liegen, die bei seiner Bewegung Momentanpol sein können.

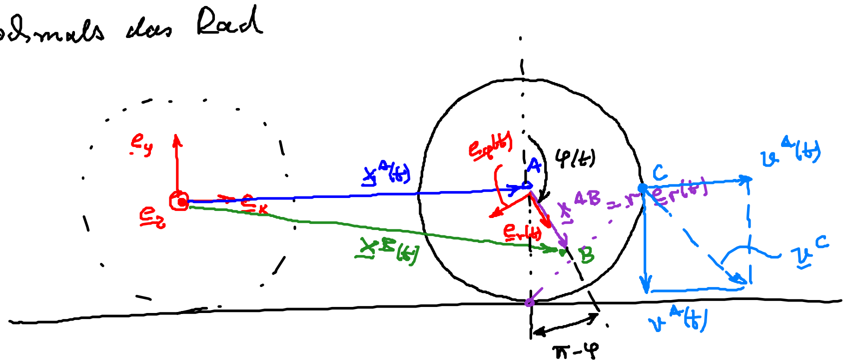
Achtung: In 2D ist eine einfache geometrische Konstruktion zum Auffinden der Lage des Momentanpols möglich



$$\underset{=0}{\cancel{\underline{v}^{\Pi}}} = \underline{v}^{A} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{A\Pi}$$

$$\underset{=0}{\cancel{\underline{v}^{\Pi}}} = \underline{v}^{B} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{B\Pi}$$

Nochmals das Rad



$$\underline{v}^A(t) = v^A(t)\,\underline{e}_x$$

$$\underline{x}^B = \underline{x}^A + \underline{x}^{AB} = x^A(t)\,\underline{e}_x + r\,\underline{e}_r(t)$$

$$= x^A(t)\,\underline{e}_x + r\,[\underbrace{\sin(\pi-\varphi)\,\underline{e}_x}_{\sin\varphi\,\underline{e}_x} \underbrace{-\cos(\pi-\varphi)\,\underline{e}_y}_{+\cos\varphi\,\underline{e}_y}]$$

$$\underline{v}^B = v^A(t)\,\underline{e}_x + r\,\dot{\varphi}(t)\,[\cos\varphi\,\underline{e}_x - \sin\varphi\,\underline{e}_y]$$

$$\underline{v}^C = \underline{v}^B\Big|_{\varphi=90^\circ} = v^A(t)\,\underline{e}_x - \underbrace{r\,\dot{\varphi}(t)}_{v^A(t)}\,\underline{e}_y$$