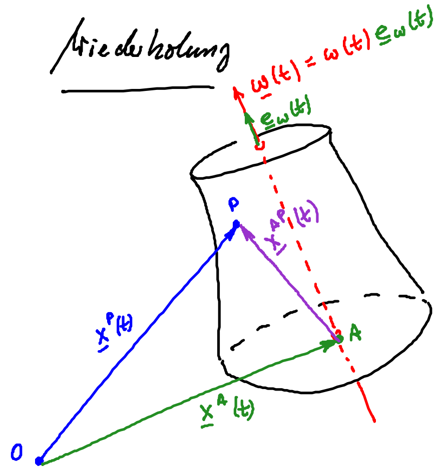
Vorlesung am 11.6.2018

- Wiederholung Eulersche kinematische Gleichungen
- 2 Beispiele
- Kinetik des starren Körpers in der Ebene, Massenträgheitsmoment des starren Körpers

Wiederholung



Euler kinematische Gleichungen

$$\underline{x}^P(t) = \underline{x}^A(t) + \underline{x}^{AP}(t) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

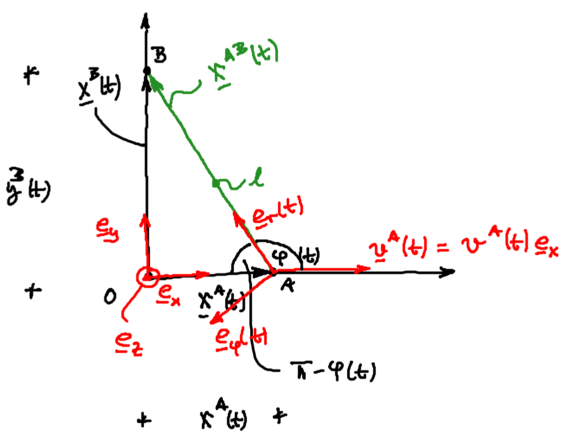
$$\underline{v}^P(t) = \underline{v}^A(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{x}^{AP}(t) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\underline{a}^P(t) = \underline{a}^A(t) + \underline{\dot{\omega}}(t) \times \underline{x}^{AP}(t) + \underline{\omega}(t) \times \left[\underline{\omega}(t) \times \underline{x}^{AP}(t)\right]$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\, \underline{a}\cdot\underline{c} - \underline{c}\, \underline{a}\cdot\underline{b}$$

$$= \underline{a}^A(t) + \underline{\dot{\omega}}(t) \times \underline{x}^{AP}(t) + \underline{\omega}(t)\, \underline{\omega}(t)\cdot\underline{x}^{AP}(t) - \underline{x}^{AP}(t)\, \underbrace{\underline{\omega}(t)\cdot\underline{\omega}(t)}_{\omega^2(t)}$$

Problem Leiter unter geführter Bewegung



$$\underline{\omega} = \omega(t)\, \underline{e}_z = \dot{\varphi}(t)\, \underline{e}_z$$

Gegeben: $\underline{v}^A(t)$, l

Gesucht: Bewegung des Punktes B

Lösung:

$$\underline{x}^B(t) = \underline{x}^A(t) + \underline{x}^{AB}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}^{AB}(t) = \underline{x}^B(t) - \underline{x}^A(t)$$

$$= y^B(t)\, \underline{e}_y - x^A(t)\, \underline{e}_x \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\dot{x}}^{AP}(t)}_{\underline{\omega} \times \underline{x}^{AB}} = \dot{y}^B(t)\, \underline{e}_y - \underbrace{\dot{x}^A(t)}_{= v^A(t)}\, \underline{e}_x$$

$$(\dot{\varphi}(t)\, \underline{e}_z) \times \left[y^B(t)\, \underline{e}_y - x^A(t)\, \underline{e}_x\right] =$$

$$\dot{\varphi}(t)\, y^B(t)\, \underbrace{\underline{e}_z \times \underline{e}_y}_{= -\underline{e}_x} - \dot{\varphi}(t)\, x^A(t)\, \underbrace{\underline{e}_z \times \underline{e}_x}_{\underline{e}_y}$$

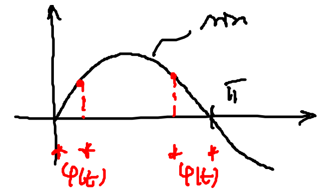
$$\Rightarrow -\dot{\varphi}(t)\, y^B(t)\, \underline{e}_x - \dot{\varphi}(t)\, x^A(t)\, \underline{e}_y = \dot{y}^B(t)\, \underline{e}_y - v^A(t)\, \underline{e}_x$$

$$\underline{e}_x: \quad \dot{\varphi}(t)\, y^B(t) = v^A(t) \quad \Rightarrow \quad y^B(t) = \frac{v^A(t)}{\dot{\varphi}(t)}$$

Problem: $\dot{\varphi}(t)$ noch nicht bekannt

e_y : $-\dot\varphi(t)\, x^A(t) = \dot y^B(t)$

komponentenweise Analyse der Bewegung als Alternative zur Vektorrechnung:



$$x^B \overset{!}{=} 0 = x^A(t) - l\,\underbrace{\sin(\pi-\varphi(t))}_{\sin\varphi(t)} \Rightarrow x^A(t) = l\sin\varphi(t)$$

Leiter ist an der Wand

$$\Rightarrow \dot x^A(t) = l\dot\varphi\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \dot\varphi = \frac{\dot x^A(t)}{l\cos\varphi} = \frac{v^A}{l\cos\varphi}$$

$$y^B = l\cos(\pi-\varphi) = -l\cos\varphi \Rightarrow \dot y^B = +l\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\cos\varphi\, d\varphi = +d\sin\varphi = \frac{v^A(t)\,dt}{l} \Rightarrow \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v^A(t)}{l}$$

$$\Downarrow$$

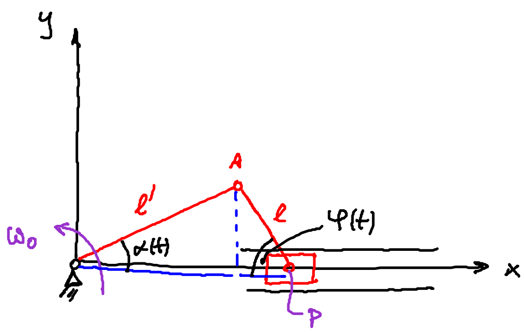
$$\sin\varphi(t) - \sin\varphi(0) = \frac{1}{l}\int_{\tilde t=0}^{\tilde t=t} v^A(\tilde t)\,d\tilde t \quad , \quad \cos\varphi(t) = \sqrt{1-\sin^2\varphi(t)}$$

$$\dot y^B = l\dot\varphi\sin\varphi = v^A(t)\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = v^A(t)\frac{\frac{1}{l}\int v^A\,dt}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{l}\int v^A\,dt\right)^2}}$$

---

2. Kurbeltrieb

Ziel: Position, Geschw., Beschl. des Kolbens P bei Vorgabe ω_0, l', l berechnen



$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0$$

Komponentendarstellung in (x, y)

(1) $x^P = l'\cos\alpha(t) + l\cos\varphi(t)$

(2) $y^P \overset{!}{=} 0 = l'\sin\alpha - l\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi(t) = \frac{l'}{l}\sin\alpha(t)$ (3) $\Big|\ \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \dot\varphi\cos\varphi = \frac{l'}{l}\dot\alpha\cos\alpha = \omega_0\frac{l'}{l}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \dot\varphi = \omega_0\frac{l'}{l}\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} \quad (4)$$

$\frac{d(1)}{dt}$: $\dot x^P = v^P = -\overbrace{\frac{d\alpha}{dt}}^{\omega_0} l'\sin\alpha - \dot\varphi\, l\sin\varphi = -l'\omega_0\sin\alpha\left[1 + \frac{\dot\varphi}{\omega_0}\frac{l}{l'}\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right] =$

$$\underset{(3)}{=} -l'\omega_0\sin\alpha\left[1+\frac{\dot\varphi}{\omega_0}\right] \underset{(4)}{=} -l'\omega_0\sin\alpha\left[1+\frac{l'}{l}\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right]$$

Außerdem: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{l'}{l}\right)^2\sin^2\alpha}$

$$\Rightarrow \dot x^P = v^P = -l'\omega_0\sin\alpha\left[1 + \frac{l'/l\,\cos\alpha(t)}{\sqrt{1-\left(\frac{l'}{l}\right)^2\sin^2\alpha(t)}}\right] = f(l, l', \omega_0)$$

Geschwindigkeit des Kolben

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}^P = \frac{dv^P}{dt} = \frac{dv^P}{d\alpha}\underbrace{\frac{d\alpha}{dt}}_{\omega_0} = g(\ell, \ell', \omega_0)$$

Beschl. des Kolbens

Bewegungsgleichungen für den Starrkörper

3D → Freitag

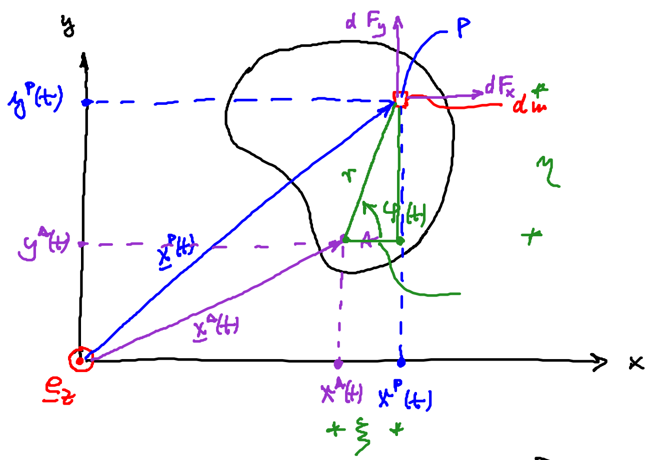
2D → heute   3.3.2 Starrkörperkinetik

Bewegungsursache = Kinetik = beim starren Körper Kräfte und Momente

→ Translation

→ Rotation des starren Körpers

Kinetik von ebenen starren Körpern (Scheiben)



Freiheitsgrade der Scheibe

Translation in x und y Richtung

Rotation in der Ebene, d.h. um die $\underline{e}_z$-Achse

Position von P im x, y-Koordinatensystem

$$x^P(t) = x^A(t) + r\cos\varphi(t)$$

Achtung: Abstand r ist nicht zeitabhängig, da es sich um einen Starrkörper handelt

$$y^P(t) = y^A(t) + r\sin\varphi(t)$$

Berechnen nun Geschw. und Beschl. vom Punkt P:

$$\left.\begin{aligned} v_x^P(t) &= \dot{x}^P(t) = \dot{x}^A(t) - r\dot{\varphi}\sin\varphi(t) \\ v_y^P(t) &= \dot{y}^P(t) = \dot{y}^A(t) + r\dot{\varphi}\cos\varphi(t) \end{aligned}\right\} \text{Geschw.}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x^P(t) &= \ddot{x}^P(t) = \ddot{x}^A(t) - r\ddot{\varphi}\sin\varphi(t) - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi(t) \\ a_y^P(t) &= \ddot{y}^P(t) = \ddot{y}^A(t) + r\ddot{\varphi}\cos\varphi(t) - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

diese Beschleunigungen werden in der Newtonschen Grundgleichung verwendet

$$\underbrace{dm\, a_x^P = dF_x \quad , \quad dm\, a_y^P = dF_y}$$

kurz geschrieben $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$

$\omega = \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} a_x^P &= a_x^A - \dot{\omega}\eta - \omega^2\xi \\ a_y^P &= a_y^A + \dot{\omega}\xi - \omega^2\eta \end{aligned}\right\}$$

$$\ddot{x}^P dm = \ddot{x}^A dm - \dot{\omega}\,\eta\, dm - \omega^2\xi\, dm = dF_x \quad (1)$$

$$\ddot{y}^P dm = \ddot{y}^A dm + \dot{\omega}\,\xi\, dm - \omega^2\eta\, dm = dF_y \quad (2)$$

Integriere über die Scheibe:

$$\int \ddot{x}^A dm - \int \dot{\omega}\,\eta\, dm - \int \omega^2\xi\, dm = F_x$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot x^S &= F_x \\ m\ddot y^S &= F_y \end{aligned}}$$

Schwerpunktsatz

Im Schwerpunkt S verschwinden diverse Terme

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot x^{\cancel{A}\,S} \underbrace{\int dm}_{m} - \dot\omega \int \cancel{\eta\, dm}^{=0} - \omega^2 \int \cancel{\xi\, dm}^{=0} = F_x \\ &\ddot y^{\cancel{A}\,S} \underbrace{\int dm}_{m} + \dot\omega \int \cancel{\xi\, dm}^{=0} - \omega^2 \int \cancel{\eta\, dm}^{=0} = F_y \end{aligned}}$$

Momentengleichgewicht

$$dM^{(A)} = \xi\, dF_y - \eta\, dF_x \underset{(1),(2)}{=} \ddot y^A \xi\, dm + \dot\omega\, \xi^2 dm - \omega^2 \xi\eta\, dm - \ddot x^A \eta\, dm + \dot\omega\, \eta^2 dm + \omega^2 \xi\eta\, dm$$

$$\dot\omega \underbrace{\int (\underbrace{\eta^2+\xi^2}_{=r^2})\, dm}_{\Theta^{(S)}} = M^{(A)}$$ im Schwerpunkt (Drallsatz)

Widerstand gegen über Rotation

Massenträgheitsmoment bei Drehung in der Ebene

Integriere über die gesamte Scheibe

$$\boxed{M^{(A)} = \ddot y^A \int \cancel{\xi\, dm}^{=0} + \dot\omega \int \xi^2 dm - \omega^2 \int \cancel{\xi\eta\, dm}^{=0} - \ddot x^A \int \cancel{\eta\, dm}^{=0} + \dot\omega \int \eta^2 dm + \omega^2 \int \cancel{\xi\eta\, dm}^{=0}}$$

Um diese Gleichungen zu vereinfachen, sei an die Definition des Schwerpunktes erinnert

$$x^S = \frac{1}{m} \int \overbrace{\rho\, x\, dV}^{dm} = \frac{1}{m} \int x\, dm = \frac{1}{m} \int (x^A + \xi)\, dm = \cancel{\frac{1}{m}}\, x^A \overbrace{\int dm}^{\cancel{m}} + \frac{1}{m} \int \xi\, dm$$

$$y^S = \frac{1}{m} \int \rho\, y\, dV = \frac{1}{m} \int y\, dm = \frac{1}{m} \int (y^A + \eta)\, dm = \frac{1}{m}\, y^A \underbrace{\int dm}_{m} + \frac{1}{m} \int \eta\, dm$$

Setze den Drehpunkt A in den Schwerpunkt S

$$\Rightarrow \quad x^S = x^S + \frac{1}{m} \int \xi\, dm, \qquad y^S = y^S + \frac{1}{m} \int \eta\, dm$$

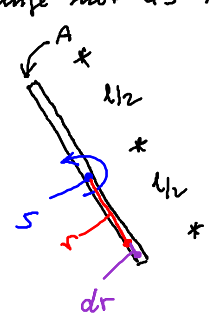
$$\Rightarrow \quad \int \xi\, dm = 0, \qquad \int \eta\, dm = 0$$

Drallsatz um Schwerpunkt

$$\Theta^{(S)} \underbrace{\dot\omega}_{\ddot\varphi} = M^{(S)}, \qquad m\ddot x^S = F_x, \qquad m\ddot y^S = F_y$$

$\Theta^{(S)} = \int r^2 dm$ in Bezug auf den Schwerpunkt

Beispiel homogene Stange mit QS A und Dichte ρ_0



$$\Theta^{(S)} = \int r^2 dm \underset{\substack{dm = \rho_0 dV \\ = \rho_0 A\, dr}}{=} \int \rho_0 A\, r^2 dr = \rho_0 A \int_{r=-l/2}^{r=+l/2} r^2 dr =$$

$$= \rho_0 A \left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=-l/2}^{r=+l/2} = \rho_0 A \frac{l^3}{12} \underset{m = A l \rho_0}{=} m \frac{l^2}{12}$$