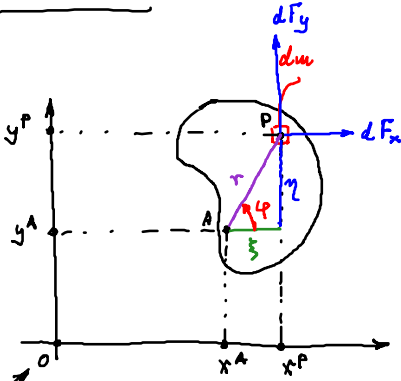


- Niederholungs: Bewegungsgleichungen Starrkörper in der Ebene, Massenkräfte & Bmomente
- Beispiele und Regeln insb. Satz von Steiner
- Bewegungsgleichungen $\exists D$, Massenkräfte & Bmomente

Niederholungs



Kinematische Beziehungen

$$x^P(t) = x^A + \xi = x^A(t) + r \cos \varphi(t) \Rightarrow \dot{x}^P(t) = \dot{x}^A(t) - \dot{\varphi} r \sin \varphi(t)$$

$$y^P(t) = y^A + \eta = y^A(t) + r \sin \varphi(t) \Rightarrow \dot{y}^P(t) = \dot{y}^A(t) + \dot{\varphi} r \cos \varphi(t)$$

Nach Newton

$$\ddot{x}^P dm = dF_x$$

$$\ddot{y}^P dm = dF_y$$

$$\int_m \ddot{x}^P dm = F_x$$

$$\int_m \ddot{y}^P dm = F_y$$

Inertialsystemursprung

Schwerpunkt:

$$x^S = \frac{1}{m} \int x^P dm = \frac{1}{m} \int (x^A + \xi) dm = x^A + \frac{1}{m} \int \xi dm \Rightarrow \int \xi dm = m(x^S - x^A) \quad (2)$$

$$y^S = \frac{1}{m} \int y^P dm = \dots \Rightarrow \int \eta dm = m(y^S - y^A) \quad (3)$$

3 Unbekannte:

$$x^A(t), y^A(t), \varphi(t)$$

$$\Rightarrow m \ddot{x}^A(t) - \ddot{\varphi} m (y^S - y^A) - \dot{\varphi}^2 m (x^S - x^A) = F_x \quad (a)$$

$$m \ddot{y}^A(t) + \ddot{\varphi} m (x^S - x^A) - \dot{\varphi}^2 m (y^S - y^A) = F_y \quad (b)$$

Momentenbeitrag
Wegmoment $\Theta^{(A)} := \int r^2 dm$

Momentenbilanz:

$$\ddot{y}^A \int \xi dm + \dot{\varphi} \int (\xi^2 + \eta^2) dm - \ddot{x}^A \int \eta dm = M^{(A)} \Rightarrow m \ddot{y}^A (x^S - x^A) + \Theta^{(A)} \ddot{\varphi} - m \ddot{x}^A (y^S - y^A) = M^{(A)} \quad (c)$$

keine Wahlmöglichkeiten für A:

$$(1) \quad A \rightarrow S \text{ (Schwerpunkt)} : \left. \begin{aligned} m \ddot{x}^S(t) &= F_x \\ m \ddot{y}^S(t) &= F_y \end{aligned} \right\} \text{ Schwerpunktssatz}$$

$$\Theta^{(S)} \ddot{\varphi}(t) = M^{(S)} \quad \text{Drallsatz am Schwerpunkt}$$

$$(2) \quad A \text{ ist ein raumfester Punkt} \quad \Theta^{(A)} \ddot{\varphi}(t) = M^{(A)}$$

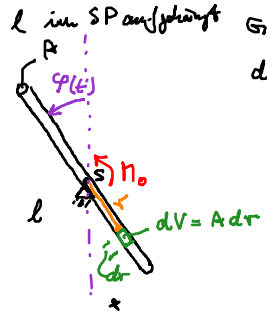
Beispiele: Berechnung der Massenkräfte & Bmomente

1) Stange (homogen) der Länge l im SP aufgehängt Grenzst $\varphi(t)$ dann Drallsatz um Schwerpunkt (= raumfester Punkt)

$\rho_0 dV = \rho_0 A dr$

$$\Theta^{(S)} = \int_m r^2 dm = \int_{r=-\frac{l}{2}}^{r=\frac{l}{2}} r^2 \rho_0 A dr = \rho_0 A \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \rho_0 A \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho_0 A \frac{l^3}{12} = m \frac{l^2}{12}$$

$m = \rho_0 A l$



$$\Theta^{(S)} \ddot{\varphi}(t) = M_0 \Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \frac{M_0}{\Theta^{(S)}}$$

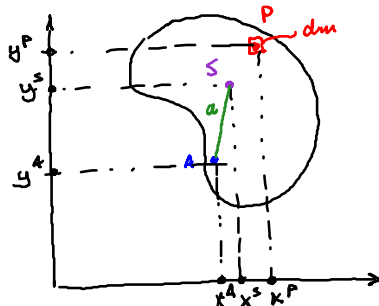
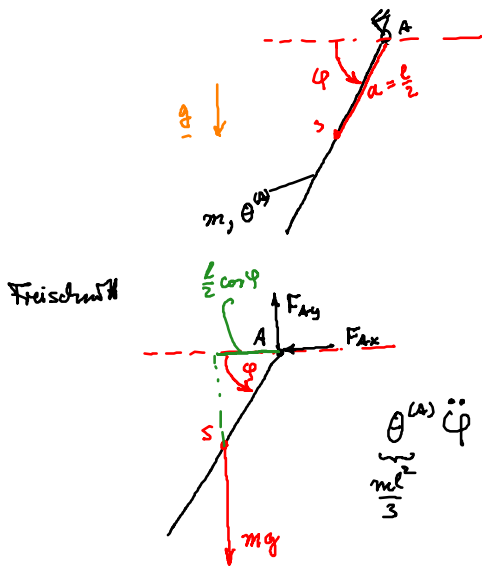
$$\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(0) = \frac{M_0}{\Theta^{(S)}} \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} d\tilde{t}$$

$$\omega(t) = \frac{M_0}{\Theta^{(S)}} t = \frac{12 M_0}{m l^2} t$$

$ma = F$

2) Stange homogen der Länge l am Ende aufgehängt

Satz von Steiner



$$\Theta^{(A)} \ddot{\varphi} = mg \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$\frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi} = mg \frac{l}{2} \cos \varphi$$

Es gilt

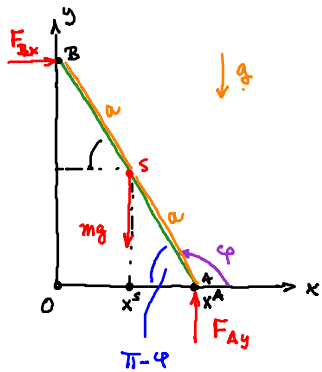
$$\Theta^{(A)} = \Theta^{(S)} + a^2 m$$

für Stange

$$\Theta^{(A)} = \frac{m l^2}{12} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m = \frac{m l^2}{12} + \frac{3 m l^2}{12} = \frac{m l^2}{3}$$

3) Die rotierende Leiste

Analyse der Bewegung mit



Schwerpunktsatz

$$m \ddot{x}^S = F_{Bx} \quad (1)$$

$$m \ddot{y}^S = -mg + F_{By} \quad (2)$$

Drallsatz an SP

$$\Theta^{(S)} \ddot{\varphi} = -F_{Bx} a \sin(\pi - \varphi) + F_{By} a \cos(\pi - \varphi)$$

$$\frac{m l^2}{12} \ddot{\varphi} = \frac{m a^2}{3} \ddot{\varphi} = -F_{Bx} a \sin \varphi - F_{By} a \cos \varphi \quad (3)$$

5 Unbekannte: $x^S(t), y^S(t), F_{Bx}(t), F_{By}(t), \varphi(t)$

Zusätzlich kinematische Gleichungen aus Koordinatenkomponenten

$$x^S = x^A - a \cos(\pi - \varphi) = x^A + a \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{x^S}{a} \Rightarrow \dot{\varphi} \sin \varphi = +\frac{\dot{x}^S}{a} \Rightarrow \ddot{x}^S = a \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 a \cos \varphi \quad (4)$$

$$y^S = a \sin \varphi \Rightarrow \dot{y}^S = a \dot{\varphi} \cos \varphi \Rightarrow \ddot{y}^S = a \ddot{\varphi} \cos \varphi - a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (5)$$

ineinander einsetzen liefert: $\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4a} \cos \varphi \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \sqrt{1 - \sin \varphi}$

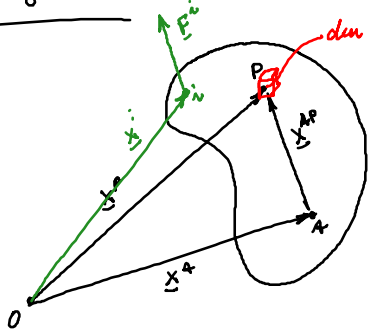


$$\ddot{\chi}_S = -\frac{3g}{4} \cos \varphi [3 \sin \varphi - 1]$$

> 0

kritischer Zustand bei $3 \sin \varphi_c - 1 = 0$

Bewegung in 3D



$$\underline{x}^P = \underline{x}^A + \underline{x}^{AP}$$

$$\underline{v}^P = \underline{v}^A + \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}$$

$$\underline{a}^P = \underline{a}^A + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}) = \underline{a}^A + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP} + \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} - \underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP}$$

Drehmomente für starren Körper

(a) Drehimpuls

$$\underline{L}^{(0)} = \int_m \underline{x}^P \times \underline{v}^P dm = \int_m \rho(\underline{x}^P) dV \quad (a)$$

(b) zeitliche Änderung von $\underline{L}^{(0)}$ = Summe aller Momente

Ständige zeitliche Änderung von $\underline{L}^{(0)}$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P \times \underline{v}^P dV = \int_V \rho(\underline{x}^P) \underbrace{\underline{v}^P \times \underline{v}^P}_0 dV + \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P \times \underline{a}^P dV$$

$$\frac{d\underline{L}^{(0)}}{dt} = \sum_i \underline{x}^i \times \underline{F}^i + \sum_j \underline{M}^j \quad (b)$$

Punktkräfte

Punktmomente ("Schraubentrieb")

Hilfsmittel zur weiteren Umformung

$$\underline{x}^S = \frac{1}{m} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P dV = \frac{1}{m} \int_V \rho(\underline{x}^P) (\underline{x}^A + \underline{x}^{AP}) dV = \frac{1}{m} \underline{x}^A \int_V \rho(\underline{x}^P) dV + \frac{1}{m} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^{AP} dV$$

SP in 3D

$$\Rightarrow \int_V \rho(\underline{x}^{AP}) \underline{x}^{AP} dV = m(\underline{x}^S - \underline{x}^A)$$

Jetzt geht's los:

$$\int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P \times \underline{a}^P dV = \int_V \rho(\underline{x}^A + \underline{x}^{AP}) \times (\underline{a}^A + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP} + \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} - \underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP}) dV =$$

$$= \underline{x}^S \times m \underline{a}^A + \int_V \rho \underline{x}^A \times (\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP}) dV + \int_V \rho \underline{x}^A \times (\underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}) dV + \int_V \rho \underline{x}^A \times \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} dV +$$

$$+ \int_V \rho \underline{x}^{AP} \times \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} dV - \int_V \rho \underline{x}^A \times (\underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP}) dV - \int_V \rho \underline{x}^{AP} \times (\underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP}) dV$$

Nummer 2 führt auf

$$\int_V \rho \underline{x}^{AP} \times (\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP}) dV = \left[\int_V \rho [\underline{x}^{AP} \cdot \underline{x}^{AP} \underline{I} - \underline{x}^{AP} \underline{x}^{AP}] dV \right] \cdot \dot{\underline{\omega}}$$

$$\underline{\dot{\omega}} = \underline{I} \cdot \dot{\underline{\omega}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$

(A)