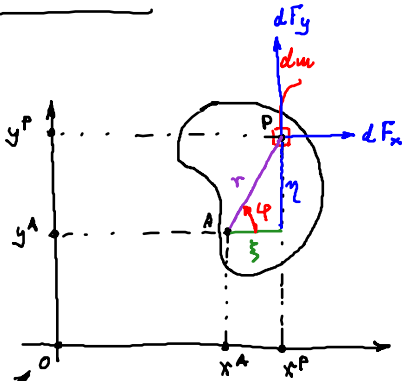


- Niederholungs: Bewegungsgleichungen Starrkörper in der Ebene, Massenkräfte/Bmomente
- Beispiele und Regeln insb. Satz von Steiner
- Bewegungsgleichungen $\exists D$, Massenkräfte/Bmomente

Niederholungs



Inertialsystemursprung

Schwerpunkt:

$$x^S = \frac{1}{m} \int x^P dm = \frac{1}{m} \int (x^A + \xi) dm = x^A + \frac{1}{m} \int \xi dm \Rightarrow \int \xi dm = m(x^S - x^A) \quad (2)$$

$$y^S = \frac{1}{m} \int y^P dm = \dots \Rightarrow \int \eta dm = m(y^S - y^A) \quad (3)$$

$$\Rightarrow m \ddot{x}^A(t) - \ddot{\varphi} m (y^S - y^A) - \ddot{\varphi}^2 m (x^S - x^A) = F_x \quad (a)$$

$$m \ddot{y}^A(t) + \ddot{\varphi} m (x^S - x^A) - \ddot{\varphi}^2 m (y^S - y^A) = F_y \quad (b)$$

Momentenbilanz:

$$\ddot{y}^A \int \xi dm + \ddot{\varphi} \int (\xi^2 + \eta^2) dm - \ddot{x}^A \int \eta dm = M^{(A)} \Rightarrow m \ddot{y}^A (x^S - x^A) + \Theta^{(A)} \ddot{\varphi} - m \ddot{x}^A (y^S - y^A) = M^{(A)} \quad (c)$$

keine Wahlmöglichkeiten für A:

$$(1) \quad A \rightarrow S \text{ (Schwerpunkt)} : \left. \begin{aligned} m \ddot{x}^S(t) &= F_x \\ m \ddot{y}^S(t) &= F_y \end{aligned} \right\} \text{ Schwerpunktsatz}$$

$$\Theta^{(S)} \ddot{\varphi}(t) = M^{(S)} \quad \text{Drehsatz am Schwerpunkt}$$

$$(2) \quad A \text{ ist ein raumfester Punkt} \quad \Theta^{(A)} \ddot{\varphi}(t) = M^{(A)}$$

Kinematische Beziehungen

$$x^P(t) = x^A + \xi = x^A(t) + r \cos \varphi(t) \Rightarrow \dot{x}^P(t) = \dot{x}^A(t) - \dot{\varphi} r \sin \varphi(t)$$

$$y^P(t) = y^A + \eta = y^A(t) + r \sin \varphi(t) \Rightarrow \dot{y}^P(t) = \dot{y}^A(t) + \dot{\varphi} r \cos \varphi(t)$$

Nach Newton

$$\ddot{x}^P dm = dF_x$$

$$\ddot{y}^P dm = dF_y$$

$$\int_m \Rightarrow \int_m \ddot{x}^P dm = F_x$$

$$\int_m \Rightarrow \int_m \ddot{y}^P dm = F_y$$

$$\ddot{x}^A \int_m dm - \ddot{\varphi} \int_m \eta dm - \ddot{\varphi}^2 \int_m \xi dm = F_x \quad (1)$$

3 Unbekannte:

$$x^A(t), y^A(t), \varphi(t)$$

Momentenbeitrag
Wahlmoment $\Theta^{(A)} := \int_m r^2 dm$

Beispiele: Berechnung der Massenkräfte/Bmomente

1) Stange (homogen) der Länge l im SP aufgehängt Grenzst $\varphi(t)$ dann Drallsatz um Schwerpunkt (= raumfester Punkt)

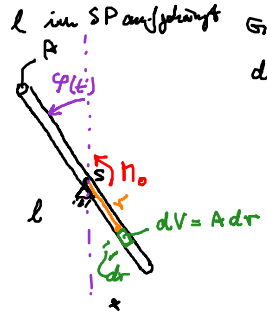
$$\rho_0 dV = \rho_0 A dr$$

$$\Theta^{(S)} = \int_m r^2 dm =$$

$$= \rho_0 A \int_{r=-\frac{l}{2}}^{r=\frac{l}{2}} r^2 dr =$$

$$= \rho_0 A \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho_0 A \frac{l^3}{12} = m \frac{l^2}{12}$$

$$m = \rho_0 A l$$



$$\Theta^{(S)} \ddot{\varphi}(t) = M_0 \Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \frac{M_0}{\Theta^{(S)}}$$

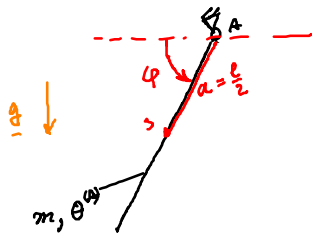
$$\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(0) = \frac{M_0}{\Theta^{(S)}} \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} d\tilde{t}$$

$$\omega(t) = \frac{M_0}{\Theta^{(S)}} t = \frac{12 M_0}{m l^2} t$$

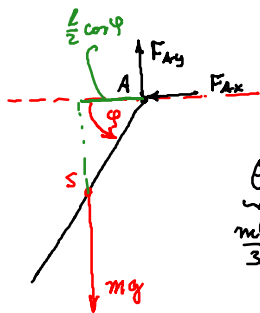
$$m a = F$$

2) Stange homogen der Länge l am Ende aufgehängt

Satz von Steiner

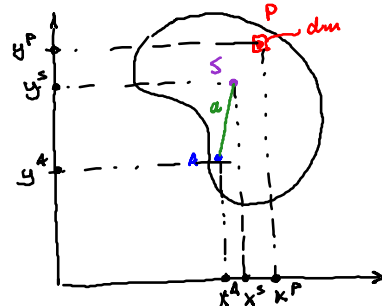


Freischnitt



$$\Theta^{(A)} \ddot{\varphi} = mg \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$\frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi} = mg \frac{l}{2} \cos \varphi$$



Es gilt

$$\Theta^{(A)} = \Theta^{(S)} + a^2 m$$

für Stange

$$\Theta^{(A)} = \frac{m l^2}{12} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m = \frac{m l^2}{12} + \frac{3 m l^2}{12} = \frac{m l^2}{3}$$

3) Die rotierende Leiste

Analyse der Bewegung mit

Schwerpunktsatz

$$m \ddot{x}^S = F_{Bx} \quad (1)$$

$$m \ddot{y}^S = -mg + F_{Ay} \quad (2)$$

Drallsatz an SP

$$\Theta^{(S)} \ddot{\varphi} = -F_{Bx} a \underbrace{\sin(\pi - \varphi)}_{\sin \varphi} + F_{Ay} a \underbrace{\cos(\pi - \varphi)}_{-\cos \varphi}$$

$$\frac{m l^2}{12} \ddot{\varphi} = \frac{m a^2}{3} \ddot{\varphi}$$

$$l = 2a$$

$$\frac{m a^2}{3} \ddot{\varphi} = -F_{Bx} \sin \varphi - F_{Ay} \cos \varphi \quad (3)$$

5 Unbekannte: $x^S(t), y^S(t), F_{Bx}(t), F_{Ay}(t), \varphi(t)$

Zusätzlich kinematische Gleichungen aus Koordinatenkomponenten

$$x^S = x^A - a \cos(\pi - \varphi) = x^A + a \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{x^S}{a} \Rightarrow \dot{\varphi} \sin \varphi = +\frac{\dot{x}^S}{a} \Rightarrow \ddot{x}^S = a \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 a \cos \varphi \quad (4)$$

$$y^S = a \sin \varphi \Rightarrow \dot{y}^S = a \dot{\varphi} \cos \varphi \Rightarrow \ddot{y}^S = a \ddot{\varphi} \cos \varphi - a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (5)$$

ineinander einsetzen liefert: $\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4a} \cos \varphi \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \sqrt{1 - \sin \varphi}$

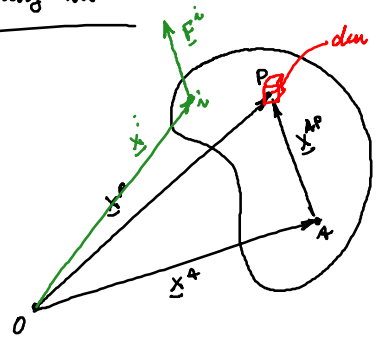


$$\ddot{\kappa}_S = -\frac{3g}{4} \cos \varphi [3 \sin \varphi - 1]$$

> 0

kritischer Zustand bei $3 \sin \varphi_c - 1 = 0$

Bewegung in 3D



$$\begin{aligned} \underline{x}^P &= \underline{x}^A + \underline{x}^{AP} \\ \underline{v}^P &= \underline{v}^A + \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP} \\ \underline{a}^P &= \underline{a}^A + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}) = \underline{a}^A + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP} + \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} - \underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP} \end{aligned}$$

Drehmomente für starren Körper

(a) Drehimpuls

$$\underline{L}^{(0)} = \int_m \underline{x}^P \times \underline{v}^P \, dm \quad (a)$$

(b) zeitliche Änderung von $\underline{L}^{(0)}$ = Summe aller Momente

Ständige zeitliche Änderung von $\underline{L}^{(0)}$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P \times \underline{v}^P \, dV = \int_V \rho(\underline{x}^P) \underbrace{\underline{v}^P \times \underline{v}^P}_0 \, dV + \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P \times \underline{a}^P \, dV$$

$$\frac{d\underline{L}^{(0)}}{dt} = \sum_i \underbrace{\underline{x}^i \times \underline{F}^i}_{\text{Punktkräfte}} + \sum_j \underbrace{\underline{M}^j}_{\text{Punktmomente ("Schraubentrieb")}} \quad (b)$$

Hilfsmittel zur weiteren Umformung

$$\underline{x}^S = \frac{1}{m} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P \, dV = \frac{1}{m} \int_V \rho(\underline{x}^P) (\underline{x}^A + \underline{x}^{AP}) \, dV = \frac{1}{m} \underline{x}^A \int_V \rho(\underline{x}^P) \, dV + \frac{1}{m} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^{AP} \, dV$$

$\Rightarrow \int_V \rho(\underline{x}^{AP}) \underline{x}^{AP} \, dV = m(\underline{x}^S - \underline{x}^A)$ *Mittelpunkt*

Jetzt geht's los:

$$\begin{aligned} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^P \times \underline{a}^P \, dV &= \int_V \rho(\underline{x}^A + \underline{x}^{AP}) \times (\underline{a}^A + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP} + \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} - \underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP}) \, dV = \\ &= \underline{x}^S \times m \underline{a}^A + \int_V \rho \underline{x}^A \times (\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP}) \, dV + \int_V \rho \underline{x}^{AP} \times (\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP}) \, dV + \int_V \rho \underline{x}^A \times \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} \, dV + \\ &+ \int_V \rho \underline{x}^{AP} \times \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{x}^{AP} \, dV - \int_V \rho \underline{x}^A \times (\underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP}) \, dV - \int_V \rho \underline{x}^{AP} \times (\underline{\omega}^2 \underline{x}^{AP}) \, dV \end{aligned}$$

Nummer 2 führt auf

$$\int_V \rho \underline{x}^{AP} \times (\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP}) \, dV = \underbrace{\left[\int_V \rho [\underline{x}^{AP} \cdot \underline{x}^{AP} \underline{I} - \underline{x}^{AP} \underline{x}^{AP}] \, dV \right]}_{\underline{I}^{(A)}} \cdot \dot{\underline{\omega}}$$

$$\underline{\dot{\omega}} = \underline{I} \cdot \dot{\underline{\omega}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$

- Mittelwertsatz: Drallsatz in 3D / Trajektorientensor
- Spezialisierung auf 2D
- kinematische Gruppe des Starrkörpers 3D/2D; Gruppe- und Arbeitssätze
- Beispiel

Untersuchung des Ausdrucks

$$\underline{\Theta} \cdot \dot{\underline{\omega}} = \int_V \rho(\underline{x}^P) \left[\underline{x}^P \cdot \underline{x}^P \underline{I} - \underline{x}^P \otimes \underline{x}^P \right] dV \cdot \dot{\underline{\omega}}$$

Momententrägheitstensor

$$\underline{x}^{AP} = \begin{bmatrix} x^{AP} \\ y^{AP} \\ z^{AP} \end{bmatrix} = [x^{AP}, y^{AP}, z^{AP}]$$

$$\begin{bmatrix} x^{AP} x^{AP} & x^{AP} y^{AP} & x^{AP} z^{AP} \\ y^{AP} x^{AP} & y^{AP} y^{AP} & y^{AP} z^{AP} \\ z^{AP} x^{AP} & z^{AP} y^{AP} & z^{AP} z^{AP} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{ij}^{(A)} = \int_V \rho(\underline{x}^P) \left\{ (x^{AP} x^{AP} + y^{AP} y^{AP} + z^{AP} z^{AP}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^{AP} \\ y^{AP} \\ z^{AP} \end{bmatrix} [x^{AP}, y^{AP}, z^{AP}] \right\} dV = \Theta_{ji}^{(A)}$$

$i, j \in \{x, y, z\}$

$$\begin{bmatrix} y^{AP} y^{AP} + z^{AP} z^{AP} & -x^{AP} y^{AP} & -x^{AP} z^{AP} \\ -y^{AP} x^{AP} & x^{AP} x^{AP} + z^{AP} z^{AP} & -y^{AP} z^{AP} \\ -z^{AP} x^{AP} & -z^{AP} y^{AP} & x^{AP} x^{AP} + y^{AP} y^{AP} \end{bmatrix}_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

$-\int_V x^{AP} y^{AP} dV$ - Deviationsmoment

Der ebene Fall: $\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{bmatrix}$ $\rightarrow \Theta^{(A)} \omega(t) = \left(\int_V \rho(\underline{x}^P) [x^{AP} x^{AP} + y^{AP} y^{AP}] dV \right) \ddot{\varphi}(t)$

$\Theta^{(A)} \rightarrow$ Massenträgheitsmoment bei Drehung um die E_z -Achse

Untersuchung der verbleibenden Terme ①, ②, ④, ⑤, z.B. ①

$$\textcircled{1}: \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^A \times (\dot{\underline{\omega}} \times \underline{x}^{AP}) dV = \underline{x}^A \times \dot{\underline{\omega}} \times \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^{AP} dV = \underline{x}^A \times \dot{\underline{\omega}} \times [m(\underline{x}^S - \underline{x}^A)] = \underline{0}$$

falls $A \rightarrow S$

$$\textcircled{3} \int_V \rho \underline{x}^A \times \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP} dV = \dots = m \underline{x}^A \times \underline{\omega} \times (\underline{x}^S - \underline{x}^A) = \underline{0}$$

$$\textcircled{4} \int_V \rho \underline{x}^{AP} \times \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP} dV = -\underline{\omega} \times \left[\int_V \rho \underline{x}^{AP} \underline{x}^{AP} dV \right] \cdot \underline{\omega}$$

$$\textcircled{5} - \int_V \rho \underline{x}^A \times (\underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}) dV = -\underline{\omega} \times \underline{x}^A \times m(\underline{x}^S - \underline{x}^A) = \underline{0}$$

ohne Beweis:

$$\left(\underline{\Theta}^{(A)} \cdot \underline{\omega} \right)' = \underline{\dot{\Theta}}^{(A)} \cdot \underline{\omega} + \underline{\Theta}^{(A)} \cdot \underline{\dot{\omega}} = -\underline{\omega} \times \left[\int_V \rho \underline{x}^{AP} \underline{x}^{AP} dV \right] \cdot \underline{\omega}$$

Ergebnis Drallsatz $m \approx D$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{L}^{(D)}}{dt} &= \left[\underline{\Theta}^{(A)} \cdot \underline{\omega} \right]' + \underline{x}^A \times (\underline{\omega} \times m(\underline{x}^S - \underline{x}^A)) + \underline{x}^A \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times m(\underline{x}^S - \underline{x}^A))) = \\ &= \sum_i \underline{x}^i \times \underline{F}^i + \sum_j \underline{M}^j \end{aligned}$$

Eulersche Bewegungsgleichungen

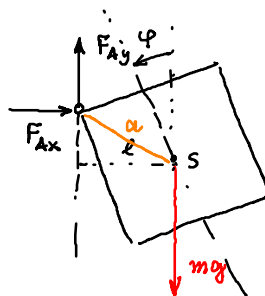
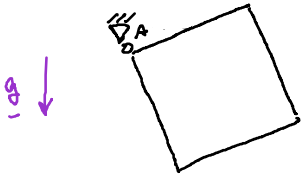
im SP:

$$\frac{d\underline{L}^{(D)}}{dt} = \left[\underline{\Theta}^{(S)} \cdot \underline{\omega} \right]' = \sum_i \underline{x}^i \times \underline{F}^i + \sum_j \underline{M}^j$$

Beispiel: Berechnung von $\Theta_{zz}^{(S)}$ für eine ebene Rotationsbewegung

Bewegungsgleichungen

Freischnitt

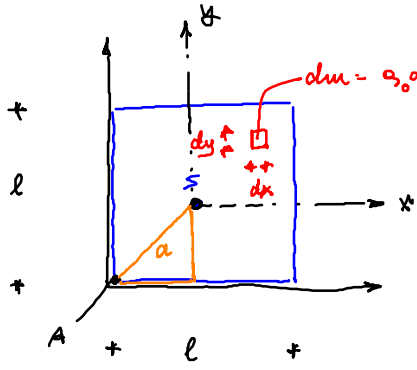


$$\Theta^{(S)} \ddot{\varphi} = M^{(A)}$$

$$\Theta^{(A)} \ddot{\varphi} = -lmg$$

$$\Theta^{(S)} + \omega^2 m$$

Berechnung von $\Theta_{zz}^{(S)} = \Theta^{(S)}$ für quadratische Platte



$dm = \rho_0 dV = \rho_0 t dx dy$

Schweren drehe

$$\Theta^{(S)} = \int_V \rho_0 [x^2 + y^2] t dx dy = \rho_0 t \left(\int_{x=-l/2}^{+l/2} x^2 dx \int_{y=-l/2}^{+l/2} dy + \int_{x=-l/2}^{+l/2} dx \int_{y=-l/2}^{+l/2} y^2 dy \right)$$

$$= \rho_0 t \left[\left. \frac{x^3}{3} \right|_{-l/2}^{+l/2} y \right. + \left. x \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-l/2}^{+l/2} \right] =$$

$$a^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{2}$$

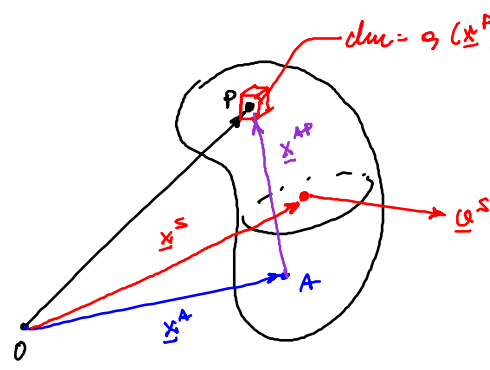
$$= \rho_0 t \geq \frac{1}{12} l^3 \rho_0 = m \frac{l^2}{6}$$

$$m = t l^2 \rho_0$$

$$\Theta^{(A)} = \Theta^{(S)} + a^2 m = \frac{m l^2}{6} + m \frac{l^2}{6} = \frac{4}{6} m l^2 = \frac{2}{3} m l^2$$

Energie- und Arbeitsrate beim starren Körper

$$\underline{v}^P = \underline{v}^A + \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}$$



$dm = \rho(\underline{x}^P) dV$

$$dE^{kin} = \frac{dm}{2} \underline{v}^P \cdot \underline{v}^P \Rightarrow E^{kin} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{v}^P \cdot \underline{v}^P dV$$

Man kann schreiben

3D: $E^{kin} = \frac{m}{2} \underline{v}^S \cdot \underline{v}^S + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \Theta^{(S)} \cdot \underline{\omega}$

A → S

2D: $E^{kin} = \frac{m}{2} [\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2] + \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \omega^2$

Beweis

$$E^{kin} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\underline{x}^P) [\underline{v}^A + \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}] \cdot [\underline{v}^A + \underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}] dV =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_V \rho(\underline{x}^P) dV}_m \right) \underline{v}^A \cdot \underline{v}^A + \frac{1}{2} \underline{v}^A \cdot \underbrace{\underline{\omega} \times \int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^{AP} dV}_{m(\underline{x}^S - \underline{x}^A)} + \frac{1}{2} \underline{\omega} \times \underbrace{\int_V \rho(\underline{x}^P) \underline{x}^{AP} dV}_{m(\underline{x}^S - \underline{x}^A)} \cdot \underline{v}^A +$$

Spatprodukt
 $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a}$

$$+ \frac{1}{2} \int_V \rho(\underline{x}^P) (\underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{x}^{AP}) dV$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \Theta^{(A)} \cdot \underline{\omega} \quad \text{mit Balken}$$

$$\frac{1}{2} \int_V \rho(\underline{x}^P) [(\underline{x}^{AP} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}^{AP})) \cdot \underline{\omega}] dV = \frac{1}{2} \left(\int_V \rho(\underline{x}^P) [\underline{\omega} \underline{x}^{AP} \cdot \underline{x}^{AP} - \underline{x}^{AP} \underline{x}^{AP} \cdot \underline{\omega}] dV \right) \cdot \underline{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \left[\int_V \rho(\underline{x}^P) [\underline{x}^{AP} \cdot \underline{x}^{AP} \underline{I} - \underline{x}^{AP} \underline{x}^{AP}] dV \right] \cdot \underline{\omega}$$

$$\Theta^{(A)}$$

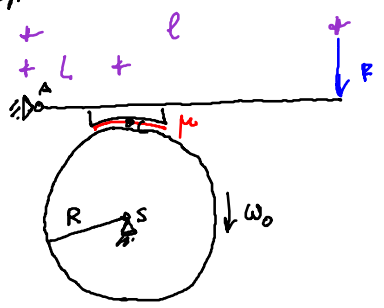
Energie- und Arbeitsätze für starre Körper

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \frac{d}{dt} E_{pot} + \underbrace{\dot{W}}_{\substack{diss \\ pot}}^{diss}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \underline{v}_S \cdot \underline{v}_S + \frac{1}{2} \omega \cdot \underline{\Theta}^{(S)} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} m [\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2] + \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \omega^2$$

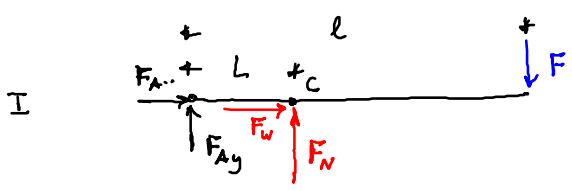
$\Rightarrow E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = E_{kin}(0) + E_{pot}(0) + W^{diss}$
wenn $W^{diss} \neq 0$ Arbeitsatz
 $W^{diss} = 0$ Energiesatz

Beispiel

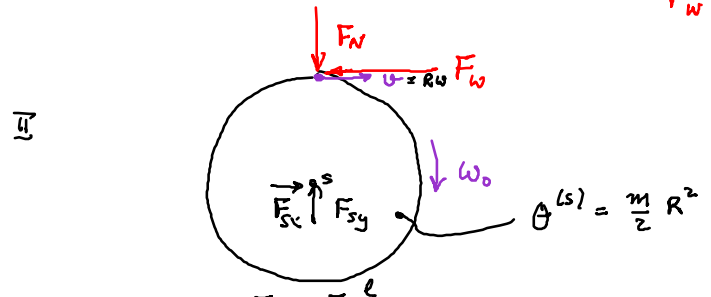


Frage: Wie lange dauert es, bis ω_0 auf Null abgebremst ist, bzw. wieviel Umdrehungen macht das Rad, bevor es zur Ruhe kommt?

Lösung: zwei Kreismomente



Coulomb:
 $F_W = \mu F_N$



System I: $\sum M^{(A)} = 0 : -F l + F_N L = 0 \Rightarrow F_N = F \frac{l}{L}$

Energiesatz II:

$$E_{kin}(t_f) - E_{kin}(0) + E_{pot}(t_f) - E_{pot}(0) = W^{diss} = - \int_{t=0}^{t=t_f} \mu F \frac{l}{L} R \frac{d\varphi}{dt} dt =$$

$$= -\mu F \frac{l}{L} R \int_{\varphi=0}^{\varphi_f} d\varphi =$$

$$= -\mu F \frac{l}{L} R \varphi_f$$

$\frac{m}{2} (v_S^2) + \frac{\Theta^{(S)}}{2} \omega_0^2$

$\Rightarrow -\frac{\Theta^{(S)}}{2} \omega_0^2 = -\mu F \frac{l}{L} R \varphi_f \Rightarrow \varphi_f = \dots$