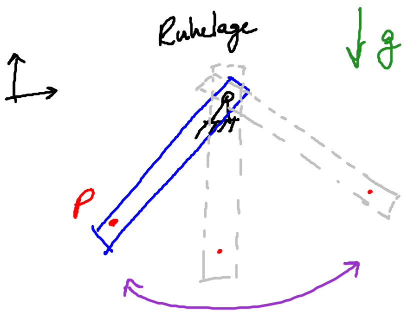
Kinematik & Dynamik , 02.07.2018

- Grundbegriffe der Schwingungslehre
- Freie, ungedämpfte Schwingungen

Schwingung: periodisch wiederkehrende Ereignisse (Zustände) im Ort/Zeit



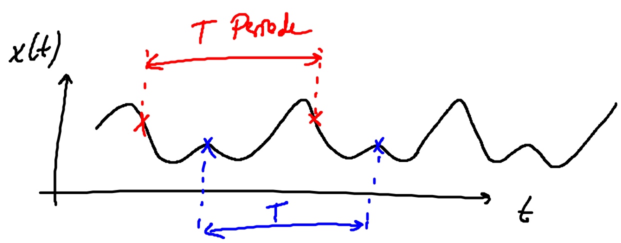
$$x(t) = x(t+T)$$

Dauer, Periodendauer

Jeder Punkt des Systems kommt zur gleichen Lage nach der Periodendauer T in s

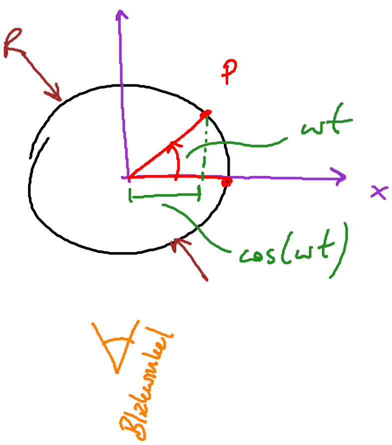
Die Frequenz: $\nu = \dfrac{1}{T}$ in $1/s = Hz$ (Hertz)

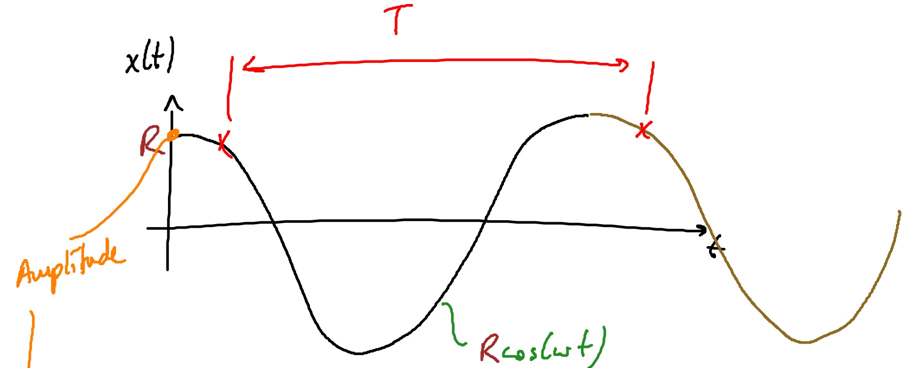
Beispiel:



starre Scheibe

Winkelgeschwindigkeit ω = konst.

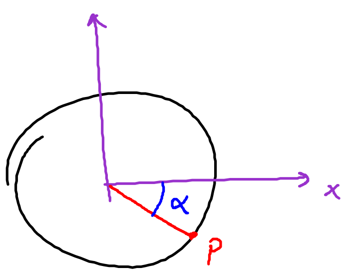




$$\omega T = 2\pi \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

$$\boxed{2\pi\nu = \omega}$$

Anfangsbedingung:



In diesem Fall $R\cos(\omega t - \alpha)$

Phasenverschiebung

Die Zeit α zurückgelegt wird:

$$t^* = \frac{\alpha}{\omega}$$

Allgemeine Form für Schwingungen: $\boxed{x = x_m \cos(\omega t - \alpha)}$

Amplitude

Kreisfrequenz

Phasenverschiebung

Trigonometrische Additionstheorem: $\cos(\beta \pm \gamma) = \cos(\beta)\cos(\gamma) \mp \sin(\beta)\sin(\gamma)$

$$x(t) = x_m \left(\cos(\omega t) \cos(\alpha) + \sin(\omega t) \sin(\alpha) \right)$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A}_{A = x_m \cos(\alpha)} \cos(\omega t) + \underbrace{B}_{B = x_m \sin(\alpha)} \sin(\omega t)}$$

: mathematische Darstellung der harmonischen Bewegung

periodisch wiederkehrend

$$\frac{B}{A} = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_m^2 \cos^2(\alpha) + x_m^2 \sin^2(\alpha)} = x_m \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = x_m$$

Zusätzliche Darstellung:

$$\boxed{x = Re\left(C^* \exp(i\omega t) \right)} \qquad i^2 = -1$$

$$C^* = C + i\bar{C}$$

$$C = Re(C^*)$$

$$\bar{C} = Im(C^*)$$

Eulersche Formel: $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$

$$x = Re\left((C + i\bar{C}) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right)$$

$$= Re\left(C \cos(\omega t) - \bar{C} \sin(\omega t) + i \left(\bar{C} \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) \right) \right)$$

$$x = \underbrace{C}_{A = Re(C^*)} \cos(\omega t) - \underbrace{\bar{C}}_{B = -Im(C^*)} \sin(\omega t)$$

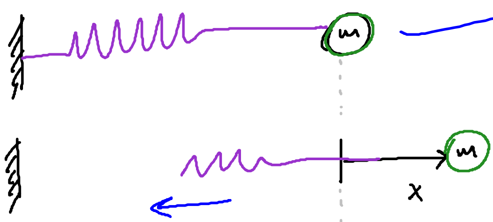
Möglichkeiten:

* gedämpfte / angefachte Schwingungen
* freie / erzwungene Schwingung
* Freiheitsgrade (FHG)
* lineare / nichtlineare Schwingungen

3.4.2 Freie, ungedämpfte, lineare Schwingung mit einem FHG

Ruhelage, Gleichgewichtslage, Referenzzustand:

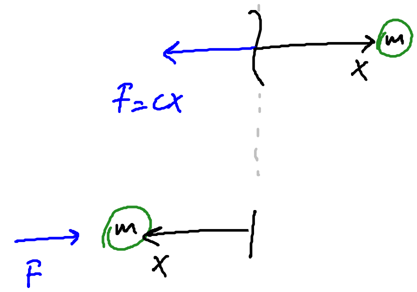
keine einwirkende Kräfte



Feder zieht zurück

$F = cx$ (lineare Feder)

Freischneiden (im ausgelenkten Zustand)



$$-F = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + F = 0$$

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

$$\mathrm{dim}\left(\frac{c}{m}\right) = \frac{\cancel{N}/m}{kg} = \frac{1}{s^2}$$

(kg m/s^2)

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0$$

ω^2 : Eigen(kreis)frequenz

in Hz $\quad \omega = 2\pi\nu$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

lineare, homogene DGL 2. Ordnung: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Ansatzfunktion

Vorschlag: $x = \sin(\omega t)$ $\rightarrow$ $-\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) = 0$

$\dot{x} = \omega\cos(\omega t)$

$\ddot{x} = -\omega^2 \sin(\omega t)$

Die allgemeine Lösung

$$x(t) = B\sin(\omega t) + A\cos(\omega t)$$

A, B aus den „Randbedingungen in der Zeit" → Anfangsbedingungen

$$\dot{x}(t) = B\omega\cos(\omega t) - A\omega\sin(\omega t)$$

$x(t=0) = x_0 = A$

$\dot{x}(t=0) = v_0 = B\omega \quad , \quad B = \frac{v_0}{\omega}$

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Alternativ: Exponentialansatz:

$$x = A \exp(\lambda t)$$
$$\dot{x} = \lambda x$$
$$\ddot{x} = \lambda^2 x$$

DGL: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 x + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$$
$$\lambda^2 = -\omega^2$$
$$\lambda_1 = +i\omega$$
$$\lambda_2 = -i\omega$$

2 Lösungen: $A_1 \exp(i\omega t)$

$A_2 \exp(-i\omega t)$

lineare DGL: Superposition:

$$x = A_1 \exp(i\omega t) + A_2 \exp(-i\omega t)$$