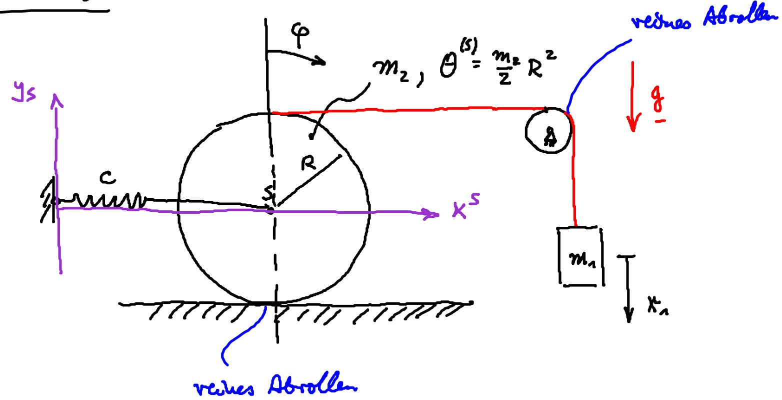
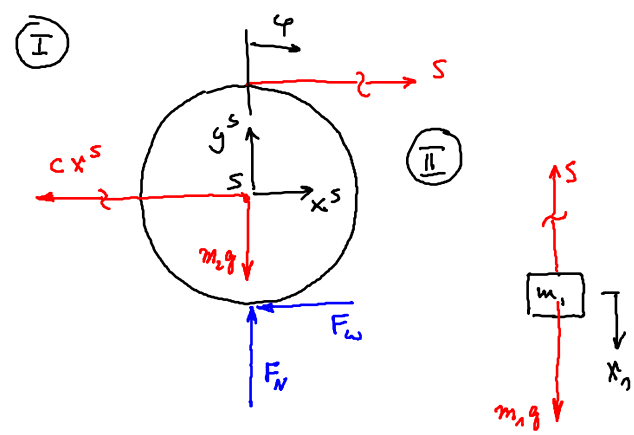
Vorlesung am 9.7.2018

- Wiederholung: Schwingungsdgl. ohne Reibung
- Coulombreibung (Trockenreibung) und Schwingung
- geschwindigkeitsproportionaler (viskoser, Stokesscher) Dämpfer (Dashpot)

Wiederholung



A) Freischnitt



B) Gleichungen

I $\quad m_2 \ddot{x}_S = -c x^S - F_W + S \quad (1)$ $\qquad$ II $\quad m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - S \quad (4)$

$m_2 \ddot{y}_S = -m_2 g + F_N \quad (2) \quad \Rightarrow \quad 0 = -m_2 g + F_N \Rightarrow F_N = m_2 g$

$-\theta^{(S)} \ddot{\varphi} = -F_W R - S R \quad (3)$ $\qquad F_W = \mu F_N$ Coulombreibung ?

7 Unbekannte: $x_S, y_S, \varphi, x_1, F_W, S, F_N$

kinematische Beziehungen:

Unterlage starr: $dy^S = 0 \Rightarrow \ddot{y}^S = 0 \quad (5)$

Rollbedingung: $R\,d\varphi = dx^S \Rightarrow R\ddot{\varphi} = \ddot{x}^S \quad (6)$

Seilbedingung: $dx_1 = dx^S + R\,d\varphi \Rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}^S + R\ddot{\varphi} = 2\ddot{x}^S \quad (7)$

$\Rightarrow$ gegenseitiges Einsetzen

$$\ddot{x}_1 \left[2 m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{\theta^{(S)}}{2R^2} \right] = -\frac{c}{2} x_1 + 2 m_1 g$$

$\frac{m_2}{4}$

$$\ddot{x}_1 + \frac{c}{2\left[2m_1 + \frac{m_2}{2} + \theta^{(S)}/2R^2\right]} x_1 = \frac{2 m_1 g}{2m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{\theta^{(S)}}{2R^2}}$$

Wir kennen

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

statische Ruhelage:

$\ddot{x}_1^{St} = 0 \quad , \quad \tilde{x}_1 = x_1 - x^{St} = x_1 - \frac{4 m_1 g}{c}$ $\quad$ wie groß?

$\ddot{\tilde{x}}_1 = \ddot{x}_1$

in Dgl. eingesetzt:

$$0 + \frac{c}{2\left[2m_1 + \frac{m_2}{2} + \theta^{(S)}/2R^2\right]} x_1^{St} = \frac{2 m_1 g}{2m_1 + \frac{m_2}{2} + \theta^{(S)}/2R^2}$$

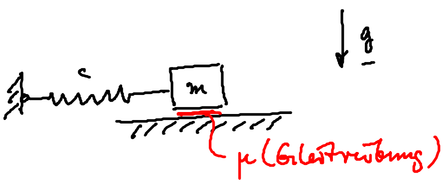
$$\Rightarrow \quad x_1^{st} = \frac{4 m_1 g}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\tilde{x}}_1 + \frac{c}{2[\quad]}\left[\tilde{x}_1 + \cancel{\frac{4 m_1 g}{c}}\right]\tilde{x}_1 = \cancel{\frac{2 m_1 g}{[\quad]}}$$

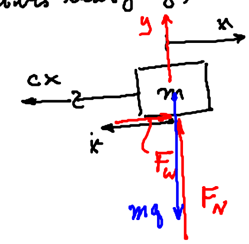
$$\Rightarrow \quad \ddot{\tilde{x}}_1 + \omega^2 \tilde{x}_1 = 0 \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Reibungsbehaftete Schwingungen

(a) Trockenreibung / Coulombreibung



Freischnitt 1 Bewegung nach links
(Situation: Masse nach rechts ausgelenkt, ohne Geschwindigkeit losgelassen, nach links bewegung)



Gleichung

$$m\ddot{x} = -cx + F_W \quad (1)$$
$$m\ddot{y} = -mg + F_N$$

Kinematik:

$dy = 0$: $\ddot{y} = 0$

$\Rightarrow F_N = mg$

Coulomb : $F_W = \mu F_N$
$= \mu mg$

(1): $m\ddot{x} = -cx + \mu mg$

$$\underbrace{\ddot{x} + \omega^2 x}_{\omega^2 = c/m} = \frac{c}{m}\frac{\mu m g}{c} = \omega^2 r \qquad , \; r = \frac{\mu m g}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 r \quad \text{für} \quad \dot{x} < 0 \quad \text{(Linksbewegung)}$$

Lösung der Dgl.: AB 1 : $x(t=0) = x_0 > 0$
$\dot{x}(t=0) = 0$

$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}$, $x_{hom}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$\ddot{x}_{hom} + \omega^2 x_{hom} = 0$

$x_{part} = r \Rightarrow \ddot{x}_{part} + \omega^2 x_{part} =$
$= 0 + \omega^2 r = \omega^2 r$ ✓

$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + r$

$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

AB 1: $x_0 = A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0} + r \Rightarrow$

AB 2: $0 = -A\omega\underbrace{\cancel{\sin}(0)}_{=0} + B\omega\underbrace{\cancel{\cos}(0)}_{=1}$

$\Rightarrow B = 0$

$A = x_0 - r$

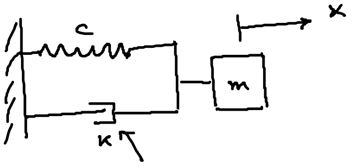
$$\Rightarrow \quad x(t) = (x_0 - r)\cos(\omega t) + r$$

Diese Lösung gilt solange $\dot{x}(t) < 0$:

$$\dot{x}(t_1) = -\omega(x_0 - r)\sin(\omega t_1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \text{ Umkehrzeitpunkt } t_1 \text{ der Bewegung}$$

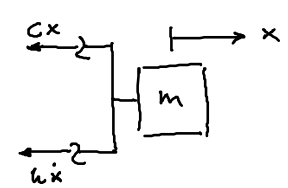
$$\omega t_1 = \pi \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

Geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer / Dashpot



geschwindigkeitsproportional im Widerstand

Freischnitt



Bewegungsglg.:

$$m\ddot{x} = -cx - k\dot{x}$$

Normalform

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

Dämpferkonstante

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0}$$

$$\Downarrow$$

Exponentialverfahren /-ansatz

$$x(t) = A\exp(\lambda t)$$

$$\dot{x}(t) = \lambda A\exp(\lambda t)$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 \underbrace{A\exp(\lambda t)}_{x(t)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t)\underbrace{\left[\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2\right]}_{=0} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm \omega\sqrt{\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2 - 1}$$

$$= -\delta \pm \omega\sqrt{D^2 - 1}$$

Lehrsche Dämpfungsmaß

$$\Rightarrow \quad x(t) = A_1\exp(\lambda_1 t) + A_2\exp(\lambda_2 t)$$

, A_1, A_2 aus Anfangsbedingungen

i) $x(t=0) = x_0$ (Anfangsort)

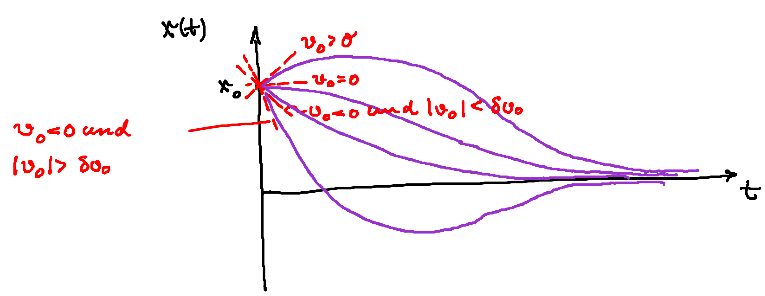
ii) $\dot{x}(t=0) = v_0$ (Anfangsgeschw.)

Fall A: Starke Dämpfung $D \gg 1$, $D > 1$

$$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} = -\delta \pm \mu, \quad \mu = \omega\sqrt{D^2-1} = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \Rightarrow \delta > \mu, \quad \omega = \frac{\delta}{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \exp(-\delta t)\left[A_1\exp(\mu t) + A_2\exp(-\mu t)\right]$$

, $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$



B) Aperiodischer Grenzfall

$$D = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta \Rightarrow D = \frac{\delta}{\omega} = 1 \Rightarrow \delta = \omega$$

$\Rightarrow \quad x(t) = A \exp(-\delta t)$ entarteten Fall, da 2 A B zu erfüllen sind, aber mit einem Konstanten ist das nur möglich

Alternative: Variation der Konstanten

$$x(t) = A(t) \exp(-\delta t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{A} \exp(-\delta t) - \delta A \exp(-\delta t)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{A} \exp(-\delta t) - 2 \dot{A} \delta \exp(-\delta t) + \delta^2 A \exp(-\delta t)$$

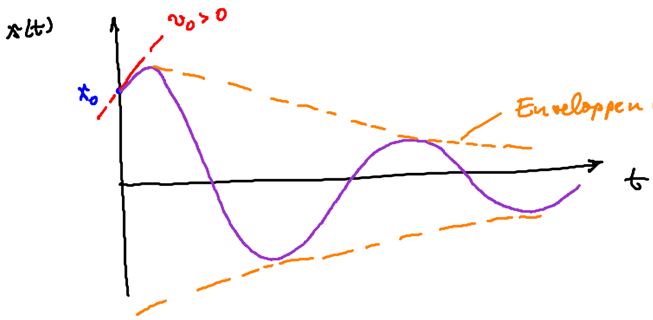
in Dgl.: $\quad \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \underbrace{\cancel{\omega^2}}_{=\delta^2} x = 0 \quad \Rightarrow \ \ldots = 0 = \exp(-\delta t)\left[\ddot{A} \ \underbrace{(\pm \ldots)}_{=0}\right] \quad \Rightarrow \quad A = \underbrace{\alpha t + \beta}_{\text{aus } A B}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = (\alpha t + \beta) \exp(-\delta t)$$

$\Rightarrow$ Lsg sieht dem Fall A) sehr ähnlich

Fall C) : Schwingfall oder Fall der schwachen Dämpfung

$$0 < D^2 < 1$$



$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega \sqrt{D^2 - 1} = -\delta \pm i \omega \sqrt{1 - D^2} = -\delta \pm i \omega_d \quad , \ \omega_d = \omega \sqrt{1 - D^2} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$x(t) = \exp(-\delta t)\left[A_1 \exp(i \omega_d t) + A_2 \exp(-i \omega_d t)\right]$$

$$\exp(\pm i \omega_d t) = \cos(\omega_d t) \pm i \sin(\omega_d t)$$

$$= \exp(-\delta t)\left[\underline{\underline{A}} \cos(\omega_d t) + \underline{\underline{B}} \sin(\omega_d t)\right] =$$

$$= C \exp(-\delta t) \cos(\omega_d t - \alpha)$$

Phasenverzögerung

$$\cos(\omega_d t) \cos\alpha + \sin(\omega_d t) \sin\alpha$$

$$= \underline{\underline{C}} \exp(-\delta t)\left[\cos(\omega_d t) \underline{\cos\alpha} + \sin(\omega_d t) \underline{\sin\alpha}\right]$$