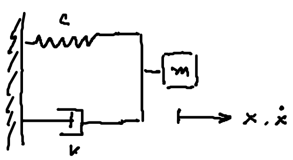
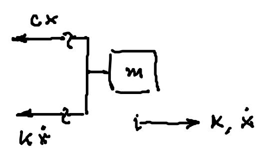
Vorlesung am 13.7.2018

- Wiederholung gedämpfte Schwingungen
- Angefachte Schwingung
- Resonanz mit/ohne Dämpfung
- Phasenverschiebung

Wiederholung



Freischnitt



Gleichung

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} - cx$$

Normalform

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\exp(\lambda t) \\ \dot{x}(t) &= \lambda\, x(t) \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 x(t) \end{aligned}\right\} \rightarrow x(t)\left[\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2\right] = 0$$

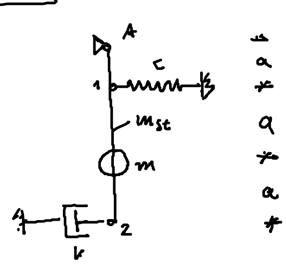
$\Rightarrow \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$ char. Gleichung

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm \omega\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}_{D^2} - 1}$$

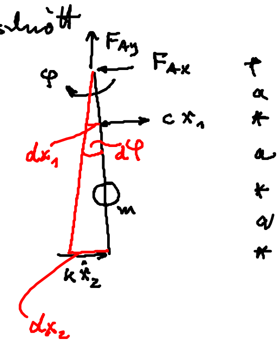
(Lehrsche Dämpfungsmaß)

1) $D > 1$ starke Dämpfung
2) $D = 1$ aperiodischer Grenzfall
3) $0 < D < 1$ Schwingfall

Beispiel



Freischnitt



Gleichungen

Drallsatz um A

$$-\Theta^{(A)}\ddot{\varphi} = c x_1 a + k\dot{x}_2 3a$$

$$\Theta^{(A)} = \frac{m_{St}}{3}(3a)^2 + m(2a)^2$$

kinematische Bedingungen

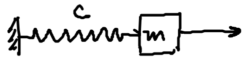
$$\left.\begin{aligned} 3a\,d\varphi = dx_2 &\Rightarrow \dot{x}_2 = 3a\dot{\varphi} \\ a\,d\varphi = dx_1 &\Rightarrow x_1 = a\varphi \end{aligned}\right\} \quad \Theta^{(A)}\ddot{\varphi} + k(3a)^2\dot{\varphi} + ca^2\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{k9a^2}{\Theta^{(A)}}}_{2\delta}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{ca^2}{\Theta^{(A)}}}_{\omega^2}\varphi = 0$$

AB: $\varphi(0) = \varphi_0$

3.4.4 Angefachte Schwingungen

(a) ohne Dämpfung

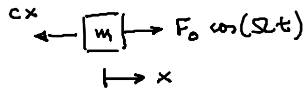


$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$

$\dot\varphi(0) = \omega_0$

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{g_{ak}}{2} \frac{1}{\sqrt{\theta^{(A)} c}}$$

FS:



Gleichungen

$$m\ddot x = -cx + F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\ddot x + \underbrace{\omega^2}_{\frac{c}{m}} x = \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega^2}\underbrace{\frac{F_0}{c}}_{x_0} \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot x + \omega^2 x = \omega^2 x_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = \underbrace{x_{hom}(t)}_{= C\cos(\omega t - \alpha)} + x_{part}(t)$$

Für die Partikulärlösung setzen wir an

$$x_{part}(t) = x_0 V \cos(\Omega t)$$

$$\dot x_{part} = -x_0 V \Omega \sin(\Omega t)$$

$$\ddot x_{part} = -x_0 V \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

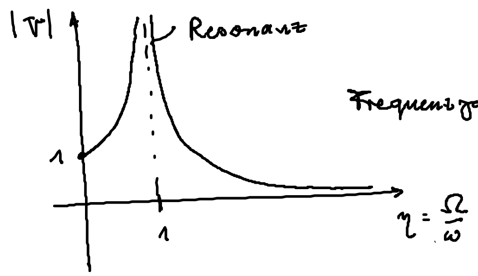
eingesetzt in

$$\ddot x_{part} + \omega^2 x_{part} = \omega^2 x_0 \cos(\Omega t)$$

$$-\cancel{x_0} V \Omega^2 \cancel{\cos(\Omega t)} + \omega^2 \cancel{x_0} V \cancel{\cos(\Omega t)} = \omega^2 \cancel{x_0} \cancel{\cos(\Omega t)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}_{\eta}^2}$$

η Abstimmung. Frequenzverhältnis



Frequenzgangskurve

Lösung für den Resonanzfall $\longrightarrow \Omega = \omega$

$$x_{part} = x_0 \bar V t \sin(\Omega t) = x_0 \bar V t \sin(\omega t)$$

$$\dot x_{part} = x_0 \bar V \sin(\Omega t) + x_0 \bar V t \Omega \cos(\Omega t)$$

$$\ddot x_{part} = 2 x_0 \bar V \Omega \cos(\Omega t) - x_0 \bar V t \Omega^2 \sin(\Omega t)$$

in $\ddot x_{part} + \underbrace{\omega^2}_{\Omega^2} x_{part} = \underbrace{\omega^2}_{\Omega^2} x_0 \cos(\Omega t)$

$$2 \cancel{x_0} \bar V \cancel{\Omega} \cancel{\cos(\Omega t)} - x_0 \bar V t \Omega^2 \cancel{\sin}(\Omega t) + x_0 \bar V t \cancel{\Omega^2} \sin(\Omega t) = \Omega^{\cancel{2}} \cancel{x_0} \cancel{\cos(\Omega t)}$$

$$\Rightarrow \bar V = \frac{\Omega}{2} = \frac{\omega}{2}$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{1}{2} x_0 t \sin(\Omega t)$$

AB's: $x(t=0) = 0$

$\dot x(t=0) = 0$

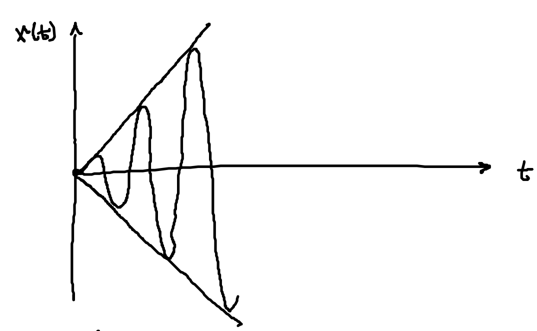
$$x(t) = C\cos(\omega t - \alpha) + \frac{x_0}{2} t \sin(\Omega t)$$

$$x(0) = C\cos(\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\dot x(t) = -C\omega \sin(\omega t - \alpha) + \frac{x_0}{2}\sin(\Omega t) + \frac{x_0}{2} t \Omega \cos(\Omega t)$$

$$\dot x(0) = 0 + 0 + 0 = 0 \checkmark$$

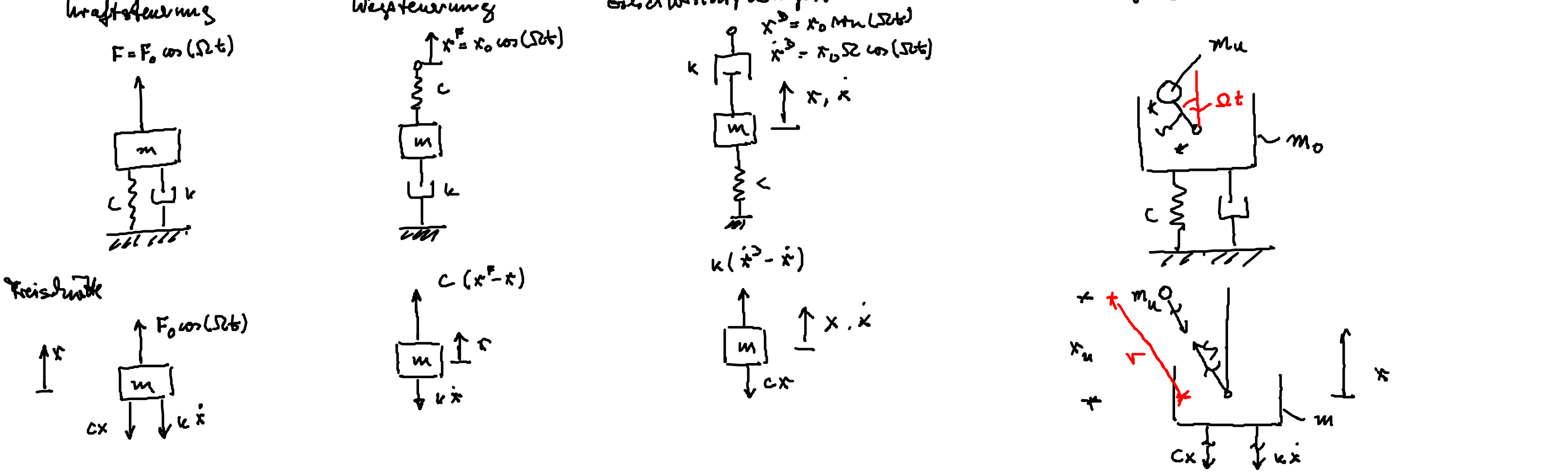
$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2} t \sin(\Omega t)$$



Angefachte Schwingungen mit geschwindigkeitsprop. Dämpfung

Vier Fälle

Kraftsteuerung — Wegsteuerung — Geschwindigkeitssteuerung — Unwuchtanregung



$m\ddot{x} = -cx - k\dot{x} + F_0\cos(\Omega t)$

$\ddot{x} + \underbrace{2\delta}_{\frac{k}{m}}\dot{x} + \underbrace{\omega^2}_{\frac{c}{m}}x = \omega^2 \underbrace{x_0}_{\frac{F_0}{c}}\cos(\Omega t)$

$m\ddot{x} = -k\dot{x} + c(x^F - x)$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{c}{m}x^F = \frac{c}{m}x_0\cos(\Omega t)$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0\cos(\Omega t)$

$m\ddot{x} = -cx + k(\dot{x}^D - \dot{x})$

$\ddot{x} + \underbrace{2\delta}_{\frac{k}{m}}\dot{x} + \underbrace{\omega^2}_{c/m}x = 2\underbrace{D}_{\frac{\delta}{\omega}}\underbrace{\eta}_{\frac{\Omega}{\omega}}\omega^2 x_0\cos(\Omega t)$

$\delta = \frac{k}{2m}$

$m_0\ddot{x} = -cx - k\dot{x} + S\cos(\Omega t)$

$m_u\ddot{x}_u = -S\cos(\Omega t)$

$x_u = r\cos(\Omega t) + x$

$\ddot{x}_u = -r\Omega^2\cos(\Omega t) + \ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2\eta^2 \underbrace{x_0}_{\frac{m_u}{m}r}\cos(\Omega t)$

$(m_0 + m_u)\ddot{x} + k\dot{x} + cx = r\Omega^2\cos\Omega t$

Endresultat: Alle 4 Fälle genügen derselben Dgl, nämlich

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{x} + \frac{2D}{\omega}\dot{x} + x = x_0\,E\cos(\Omega t) \quad \text{mit} \quad E = \begin{cases} = 1 & \text{für Kraft/Wegst.} \\ = 2D\eta & \text{für Geschw. st.} \\ = \eta^2 & \text{für Unwucht} \end{cases}$$

Zur Lösung

$$x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty} + x_p(t)$$

$x_p(t) = x_0 V\cos(\Omega t - \varphi)$ einsetzen und V und φ – Bestimmungsglg. ermitteln

$$\Rightarrow \quad \tan\varphi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}, \quad V = \frac{E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$