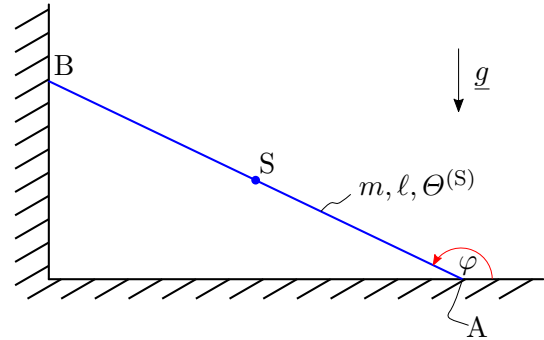


Aufgabenstellung

Betrachtet wird ein starrer Körper der Länge ℓ , der Masse m und des Massenträgheitsmoments $\Theta^{(S)} = m\ell^2/12$ bezüglich des Schwerpunktes S . Der Körper befinde sich bis zum möglichen Ablösen (Fall I) im reibungsfreien Kontakt mit den Wänden in den Punkten A und B . Nach dem Ablösen (Fall II) hat die Leiter keinen Kontakt mit der vertikalen Wand.

Zu Beginn ist der Körper mit beiden Wänden im Kontakt und der Anfangswinkel ist gegeben durch den Winkel $\varphi_0 = 3\pi/4$. Die Punkt A ruht zu Beginn.



- Geben Sie für Fall I die notwendigen kinematischen Beziehungen an, um die Bewegung des Körpers ausschließlich in Abhängigkeit des Winkels φ zu beschreiben. Geben Sie den Beschleunigungsvektor des Schwerpunktes S ebenfalls an.
- Erstellen Sie einen Freischnitt, falls der Körper in den Punkten A und B Kontakt zur Wand hat. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.
- Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichungen und berechnen Sie die Funktion $\dot{\varphi}(t)$. Geben Sie außerdem die Kontaktkräfte in den Punkten A und B an.
- Zu welchem Zeitpunkt \hat{t} löst sich der starre Körper zum ersten Mal von der Wand?
- Erstellen Sie einen Freischnitt, falls der Körper lediglich im Punkt A Kontakt zur Wand hat. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.
- Wie viele Freiheitsgrade hat das System falls der Körper lediglich im Punkt A zur Wand hat. Geben Sie die notwendigen kinematischen Beziehungen an, um die Bewegung des Körpers ausschließlich in Abhängigkeit des Winkels φ und horizontalen Geschwindigkeit des Punktes A zu beschreiben.
- Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichungen mit den Ergebnissen aus f) und geben Sie die Differentialgleichungen, welche die zeitliche Änderung des Freiheitsgrade des Systems beschreiben.
- Integrieren Sie die auftretenden Differentialgleichungen aus g) numerisch mit einem Runge-Kutta-Verfahren. Verwenden Sie bspw. Matlab oder die python-Bibliotheken numpy und scipy.

Gegeben: $m, \ell, \Theta^{(S)}, g$.

Lösung

- Im Fall I bleiben der Leiter in den Punkten A und B stets im Kontakt mit der Wand. Die Geschwindigkeit ist dort stets tangential. Aus den kinematischen Einschränkungen folgen zunächst die Ortsvektoren der Kontaktpunkte:

$$\underline{x}^A = x^A \underline{e}_x = \ell \cos(\pi - \varphi) \underline{e}_x = -\ell \cos(\varphi) \underline{e}_x, \quad \underline{x}^B = y^B \underline{e}_y = \ell \sin(\pi - \varphi) \underline{e}_y = \ell \sin(\varphi) \underline{e}_y, \quad (1)$$

wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit der Kennzeichnung, dass es sich um Fall I handelt, weggelassen wurde. Im zweiten Schritt der obigen Gleichungen wurden die trigonometrischen Funktionen umgeschrieben:

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin(\varphi) \quad , \quad \cos(\pi - \varphi) = -\cos(\varphi) \quad .$$

Der Ortsvektor zum Schwerpunkt S durch vektorielle Zerlegung geschrieben werden als: $\underline{x}^S = \underline{x}^A + \underline{x}^{AS}$. Mit der Hilfsgröße $a = \ell/2$ kann der Ortsvektor wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{x}^S &= x^A \underline{e}_x + a \left(-\cos(\pi - \varphi) \underline{e}_x + \sin(\pi - \varphi) \underline{e}_y \right) = (a - \ell) \cos(\varphi) \underline{e}_x + a \sin(\varphi) \underline{e}_y \\ &= a \left(-\cos(\varphi) \underline{e}_x + \sin(\varphi) \underline{e}_y \right) \quad . \quad (2) \end{aligned}$$

Die Lage des Schwerpunktes hängt somit lediglich vom Winkel φ und gegebenen geometrischen Größen ab. Das System hat somit lediglich einen Freiheitsgrad.

Die Geschwindigkeit Beschleunigung des Schwerpunktes können nun durch Differentiation nach der Zeit bestimmt werden. Für die Geschwindigkeit ergibt sich:

$$\underline{v}^S = a \dot{\varphi} (\sin(\varphi) \underline{e}_x + \cos(\varphi) \underline{e}_y) \quad . \quad (3)$$

Daraus folgt für die Beschleunigung:

$$\underline{a}^S = a \left[(\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)) \underline{e}_x + (\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) \underline{e}_y \right] \quad . \quad (4)$$

- b) Die Kontakt zwischen der Wand und der Leiter wird als reibungsfrei modelliert. Im in Abb. 1 dargestellten Freischnitt gibt es also lediglich Normalkräfte in den Kontaktpunkten. Das Koordinatensystem liegt im Eckpunkt und der \underline{e}_z zeigt aus der Zeichenebene heraus. Der Schwerpunktssatz

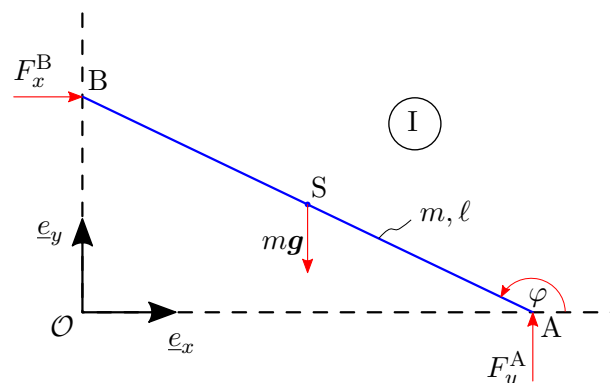


Abb. 1: Freischnitt, falls die Leiter in den Punkten A und B im Kontakt zur Wand hat.

für den in Abb. 1 dargestellten Freischnitt lautet:

$$m \underline{a}^S = \underline{F} = F_x^B \underline{e}_x + (F_y^A - mg) \underline{e}_y \quad .$$

Durch die Projektion, d. h. Skalarmultiplikation, mit \underline{e}_x beziehungsweise \underline{e}_y folgen aus dem Schwerpunktssatz zwei Gleichungen:

$$m \underline{\ddot{x}}^S = \underline{F} = F_x^B \underline{e}_x + (F_y^A - mg) \underline{e}_y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ma [\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + (\dot{\varphi})^2 \cos(\varphi)] = F_x^B \quad , \\ ma [\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - (\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi)] = F_y^A - mg \quad . \end{cases}$$

Aus der Drallbilanz bzgl. des Schwerpunktes S folgt die dritte Bewegungsgleichung:

$$\Theta^{(S)}\ddot{\varphi} = (x^A - x^S)F_y^A - (y^B - y^S)F_x^B \Rightarrow \frac{m\ell^2}{12}\ddot{\varphi} = -a \cos(\varphi)F_y^A + (a - \ell) \sin(\varphi)F_x^B . \quad (5)$$

Im zweiten Schritt ist das Massenträgheitsmoment eines schlanken Stabes eingesetzt worden. Außerdem wurden die geometrischen Beziehung in Gl. 1 und 1 verwendet.

c) Insgesamt sind demnach die folgenden drei Gleichungen zu lösen:

$$ma[\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)] = F_x^B , \quad (6a)$$

$$ma[\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)] = F_y^A - mg , \quad (6b)$$

$$\frac{m\ell^2}{12}\ddot{\varphi} = -a \cos(\varphi)F_y^A + (a - \ell) \sin(\varphi)F_x^B , \quad (6c)$$

um die drei Unbekannten φ , F_x^B und F_y^A zu bestimmen. Die ersten beiden Gleichungen können nun genutzt werden, um die Kräfte in der dritten Gleichung nach wenigen Vereinfachungen wie $\ell^2 = 4a^2$ zu eliminieren:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -3 \cos(\varphi)[\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - (\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi)] - 3 \frac{g}{a} \cos(\varphi) - 3 \sin(\varphi)[\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + (\dot{\varphi})^2 \cos(\varphi)] \\ &= -3\ddot{\varphi} - 3 \frac{g}{a} \cos(\varphi) , \quad (7) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der trigonometrische Satz des PYTHAGORAS, $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$, angewendet worden ist. Die letzte Gleichung lässt sich schließlich zu einer nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung zusammenfassen:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4a} \cos(\varphi) . \quad (8)$$

Wird diese Gleichung mit $\dot{\varphi}$ multipliziert, dann kann die Produktregel verwendet werden, um die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ durch anschließende Integration zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{3g}{4a} \cos(\varphi)\dot{\varphi} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\dot{\varphi})^2] = -\frac{3g}{4a} \frac{d}{dt} [\sin(\varphi)] \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}(t)^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \frac{3g}{2a} [\sin(\varphi_0) - \sin(\varphi(t))] , \quad (9) \end{aligned}$$

wobei $\dot{\varphi}_0$ die Winkelgeschwindigkeit und φ_0 den Winkel zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Somit folgt für die Winkelgeschwindigkeit mit $a = \ell/2$ und $\dot{\varphi}_0^2 = \alpha g/\ell$

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{3g}{\ell} (\sin(\varphi_0) - \sin(\varphi)) + \dot{\varphi}_0^2} = \sqrt{\frac{g}{\ell} \sqrt{3 \sin(\varphi_0) - 3 \sin(\varphi) + \alpha}} . \quad (10)$$

Hier ist der Faktor α eingeführt worden, um den obigen Ausdruck etwas einfacher zu schreiben. Die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit des Punktes A und α ergibt sich über die Anfangsgeschwindigkeit von Punkt A. Durch Differentiation von Gl. (2) ergibt sich für $t = 0$:

$$v_0 = \dot{\varphi}_0 \ell \sin(\varphi_0) \Rightarrow \alpha = \frac{v_0^2}{g \ell \sin^2(\varphi_0)} . \quad (11)$$

Für die in der Aufgabenstellung gegebenen Anfangsbedingungen ergibt sich $v_0 = 0$ und damit

$\alpha = 0$ sowie $\sin(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ lässt sich somit schreiben als:

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{3g}{\sqrt{2}\ell}} \sqrt{1 - \sqrt{2} \sin(\varphi)} . \quad (12)$$

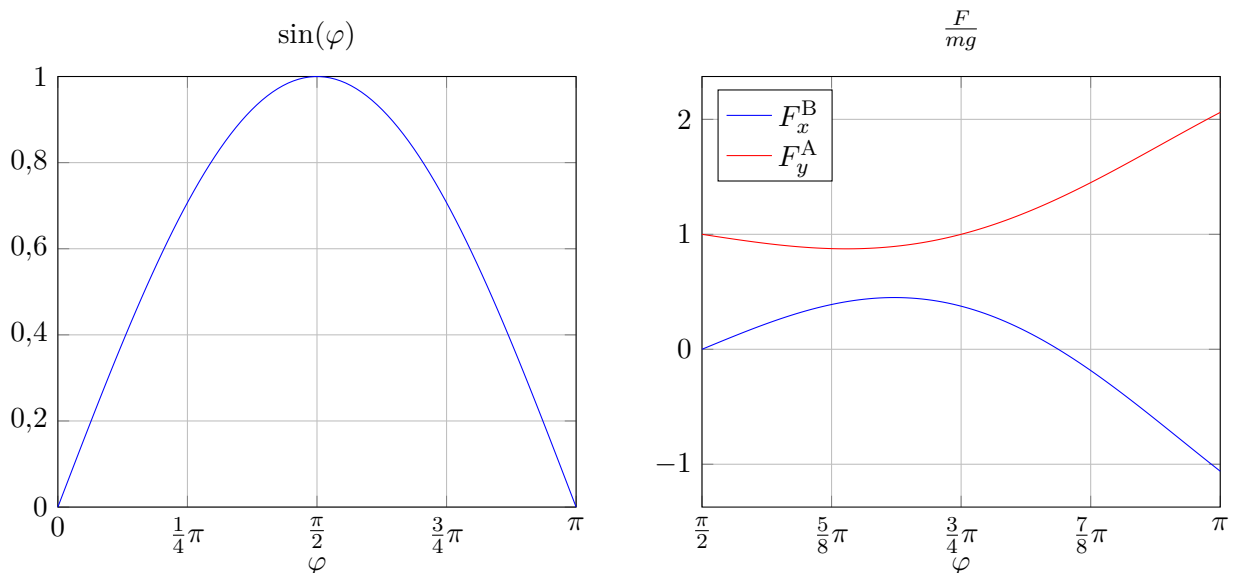
Die Einführung des Faktor α ermöglicht im Folgenden eine Diskussion der notwendigen Bedingung für eine Ablösung von der Wand in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen.

- d) Die notwendige Bedingung für das Ablösen ist, dass eine der Normalkräfte verschwindet. Zunächst werden die Normalkräfte aus den Gl. (6a) und (6b) mit Hilfe der Ergebnisse in Gl. (8) und (10). Für die horizontal wirkende Kraft F_x^B ergibt sich in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} F_x^B &= \frac{mg}{2} \left(-\frac{3}{2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) + (3 \sin(\varphi_0) - 3 \sin(\varphi) + \alpha) \cos(\varphi) \right) \\ &= \frac{mg}{4} \cos(\varphi) (6 \sin(\varphi_0) - 9 \sin(\varphi) + 2\alpha) . \end{aligned} \quad (13)$$

Durch gleiches Vorgehen ergibt sich für die vertikal wirkende Kraft F_y^A in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen:

$$F_y^A = mg + \frac{mg}{4} \cos(\varphi) (-6 \sin(\varphi_0) + 3 \sin(\varphi) - 2\alpha) . \quad (14)$$



(a) Verlauf der Sinusfunktion im Bereich $0 < \varphi < \pi$.

(b) Verlauf der Kontaktkräfte im Bereich $\pi/2 < \varphi < \pi$.

Abb. 2: Zur Analyse der Kontaktkräfte.

Im Folgenden wird die Ablösung im Punkt B diskutiert. Dazu werden die Nullstellen der Kontaktkraft F_x^B bestimmt. Es ergibt sich:

$$F_x^B(\hat{\varphi}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\hat{\varphi}) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin(\hat{\varphi}) = \frac{6 \sin(\varphi_0) + 2\alpha}{9} . \quad (15)$$

Die Nullstelle des Kosinus entspräche der vertikal an der Wand stehenden Leiter. Diese Lage

entspricht der instabilen Gleichgewichtslage und wird nicht weiter betrachtet, da eine Ablösung nach dem Verlassen der Gleichgewichtslage untersucht werden soll. Deshalb ergibt sich die relevante Nullstelle mit der zweiten Bedingung zu:

$$\hat{\varphi} = \pi - \arcsin\left(\frac{6 \sin(\varphi_0) + 2\alpha}{9}\right). \quad (16)$$

An dieser Stelle ist π addiert worden, da der gesuchte Winkel zwischen $\pi/2$ und π liegen soll. Die Arkussinusfunktion liefert jedoch stets Werte im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$, siehe Abb. 2a.

Falls die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes A positiv ist, würde sich Schwerpunkt S dem Boden annähern und somit würde der Winkel φ größer werden. Um zu entscheiden, ob eine Ablösung überhaupt eintritt, sollte der Ablöswinkel $\hat{\varphi}$ somit größer sein als der Winkel zu Beginn. Das heißt $\hat{\varphi} > \varphi_0$. Da die Sinusfunktion im Intervall $(\pi/2, \pi)$ monoton fallend ist, ergibt sich unter Verwendung von Gl. (15)

$$\sin(\hat{\varphi}) < \sin(\varphi_0) \Leftrightarrow \frac{6 \sin(\varphi_0) + 2\alpha}{9} < \sin(\varphi_0) \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2} \sin(\varphi_0). \quad (17)$$

Falls die obige Bedingung erfüllt, kommt es somit stets zum Ablösen im Punkt B. Insbesondere wenn die Leiter zu Beginn in Ruhe ist, d. h. $\alpha = 0$, löst sie sich zwangsläufig ab.

Abbildung 2b zeigt den Verlauf der Kontaktkräfte für die gegebenen Anfangsbedingungen. Es ist zu erkennen, dass die Kraft F_y^A im betrachteten Intervall nie Null ist. Punkt A ist also stets im Kontakt zum Boden. Im Punkt B tritt jedoch Ablösung auf, da die Kraft F_x^B im betrachteten Intervall eine Nullstelle besitzt.

Für die gegebenen Anfangsbedingungen liefert Gl. (16) mit $\alpha = 0$ den Ablöswinkel $\hat{\varphi} = \arcsin(\sqrt{2}/3) \approx 2,65071$. Die Bestimmung der zugehörigen Zeit \hat{t} ist nur durch die Verwendung sog. spezieller Funktionen möglich. Trennung der Variablen in Gl. (12) ergibt:

$$dt = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}a}{3g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sqrt{2} \sin(\varphi)}} \Leftrightarrow \hat{t} = \int_0^{\hat{t}} dt = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}a}{3g}} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\hat{\varphi}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sqrt{2} \sin(\varphi)}}. \quad (18)$$

Das verbleibende Integral auf der rechten Seite lässt sich mit Hilfe des elliptischen Integrals 2. Art ausdrücken. Darauf soll an dieser Stelle allerdings nicht weiter eingegangen werden.

- e) Zur Zeit \hat{t} gibt es keine Kontaktkraft zwischen der vertikalen Wand und der Leiter. D. h. im Freischnitt wird die Kraft F_x^B nicht mehr berücksichtigt. Der Kontakt im Punkt A wird weiterhin als reibungsfrei modelliert. Es ergibt sich somit der in Abb. 3 dargestellte Freischnitt.

Der Schwerpunktsatz ergibt sich zu:

$$m\underline{a}^S = (F_y^A - mg)\underline{e}_y. \quad (19)$$

Der Drallsatz bzgl. des Schwerpunktes S lautet in diesem Fall:

$$\Theta^{(S)}\ddot{\varphi} = (x^A - x^S)F_y^A \Rightarrow \frac{m\ell^2}{12}\ddot{\varphi} = -a \cos(\varphi)F_y^A. \quad (20)$$

Die drei obigen Gleichungen beinhalten die kinematischen Unbekannten $x^S(t)$, $y^S(t)$ und $\varphi(t)$. Die Kraft F_y^A ist ebenfalls unbekannt. Somit wird eine weitere Gleichung zur Lösung des Systems benötigt. Diese wird im nächsten Aufgabenteil aus der Kinematik des Systems gewonnen.

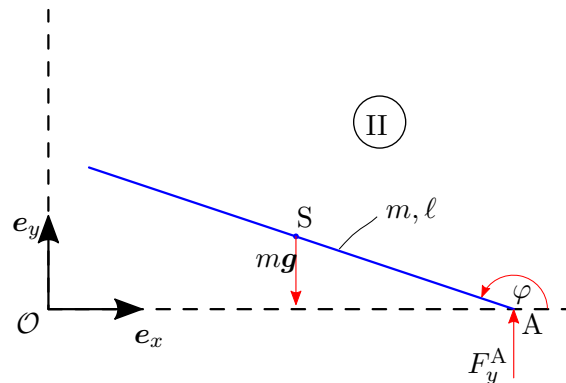


Abb. 3: Freischnitt, falls die Leiter lediglich im Punkt A Kontakt zur Wand hat.

- f) In der Ebene besitzt das System im Allgemeinen drei Freiheitsgrade. Aufgrund der Kontakt im Punkt A liegt jedoch eine Zwangsbedingung vor. Diese verhindert die Verschiebung des Kontaktpunktes in e_y -Richtung. Somit besitzt das System zwei Freiheitsgrade. Die Position des Punktes A, x^A , und der Winkel φ werden als Freiheitsgrade gewählt.

Somit kann der Ortsvektor zum Schwerpunkt geschrieben werden als:

$$\underline{x}^S(t) = x^A(t)\underline{e}_x + a \left(-\cos(\pi - \varphi)\underline{e}_x + \sin(\pi - \varphi)\underline{e}_y \right) = \left(x^A(t) + a \cos(\varphi) \right) \underline{e}_x + a \sin(\varphi)\underline{e}_y, \quad (21)$$

wobei der Winkel φ ebenfalls von der Zeit abhängig ist. Zweifache Differentiation nach der Zeit t liefert die Beschleunigung des Schwerpunktes:

$$\underline{a}^S(t) = \left(\ddot{x}^A(t) - a \left(\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \right) \right) \underline{e}_x + a \left(\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \right) \underline{e}_y. \quad (22)$$

Dieses Ergebnis wird im Folgenden verwendet um die Bewegungsgleichungen des Systems zu bestimmen.

- g) Durch Substitution von Gl. (22) in Gl. (19) ergibt sich komponentenweise:

$$\ddot{x}^A(t) = a \left(\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \right), \quad F_y^A = mg + ma(\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)). \quad (23)$$

Der erste Gleichung kann als Differentialgleichung aufgefasst werden, die die zeitliche Änderung von x^A beschreibt. Substitution der letzten Gleichung in Gl. (20) liefert die Differentialgleichung für den Winkel φ :

$$\frac{m\ell^2}{12}\ddot{\varphi}(t) = -mga \cos(\varphi) - ma^2 \cos(\varphi)(\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)). \quad (24)$$

Zusammenfassend können die beiden Differentialgleichung des Systems geschrieben werden als:

$$\ddot{x}^A = \frac{\ell \cos(\varphi)}{1 + 3 \cos^2(\varphi)} \left(2\dot{\varphi}^2 - 3\frac{g}{\ell} \sin(\varphi) \right), \quad (25a)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3 \cos(\varphi)}{1 + 3 \cos^2(\varphi)} \left(\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - 2\frac{g}{\ell} \right). \quad (25b)$$

Die Gleichungen sind stark nichtlinear und eine analytische Behandlung ist damit nur durch Näherungsmethoden möglich. Deshalb wird das System im Folgenden numerisch integriert.

- h) Um eine numerische Lösung von Gl. (25a) und (25b) zu bestimmen, müssen die Gleichungen als

System erster Ordnung geschrieben werden. Mit $\alpha \equiv \dot{\varphi}$ und $v_x^A \equiv \dot{x}^A$ ergibt sich nun die folgende vier Gleichungen:

$$\dot{x}^A = v_x^A, \quad (26a)$$

$$\dot{v}_x^A = \frac{\ell}{1 + 3 \cos^2(\varphi)} \left(2\alpha^2 - 3\frac{g}{\ell} \sin(\varphi) \right), \quad (26b)$$

$$\dot{\varphi} = \alpha, \quad (26c)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{3 \cos(\varphi)}{1 + 3 \cos^2(\varphi)} \left(\alpha^2 \sin(\varphi) - 2\frac{g}{\ell} \right). \quad (26d)$$

Die Zeitählung soll im Moment des Ablösen von der vertikalen Wand beginnen. Dann lauten die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x^A(t=0) &= x^A(\varphi = \hat{\varphi}), & v^A(t=0) &= \dot{x}^A(\varphi = \hat{\varphi}), & \varphi(t=0) &= \hat{\varphi}, \\ \alpha(t=0) &= \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}(\varphi = \hat{\varphi}), \end{aligned} \quad (27)$$

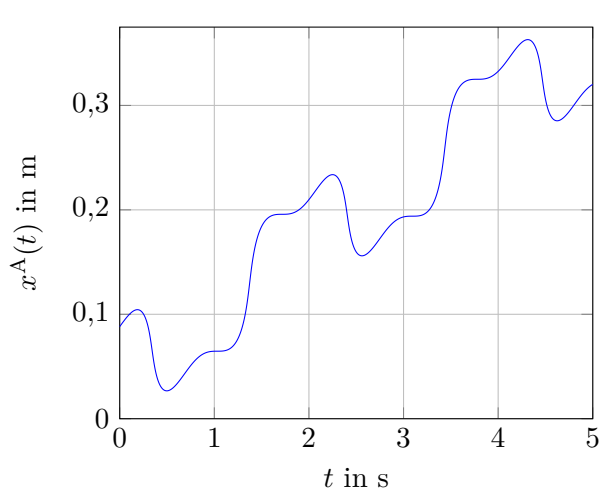
welche mit Hilfe von Gl. (1), (12) und (16) explizit bestimmt werden können. Listing 1 zeigt wie das System nun numerisch in python integriert werden kann.

Abbildung 4 zeigt die numerische Lösung für $g/\ell = 10 \text{ m s}^{-2}$, was für $g = 9,81 \text{ m s}^{-1}$ einer Länge der Leiter von ca. 0,1 m entspricht. Die Lösung wurde im Zeitraum von $0 \leq t \leq 5 \text{ s}$ berechnet. Die Leiter bzw. der Punkt B erreicht den Boden, falls $\varphi = \pi$ ist. In diesem Fall würde die berechnete Lösung streng genommen nicht mehr gelten, da es zu einen Stoß zwischen der Leiter und dem Boden kommen würde. Bei ca. 0,14s gilt: $\phi = \pi$, siehe Abb. 4. Der Stoß tritt bereits im berechneten Zeitintervall auf. Die Position der Leiter ist in Abb. 5 dargestellt. Es ist dort ebenfalls zu erkennen, dass die Leiter dort durch den Boden schlägt.

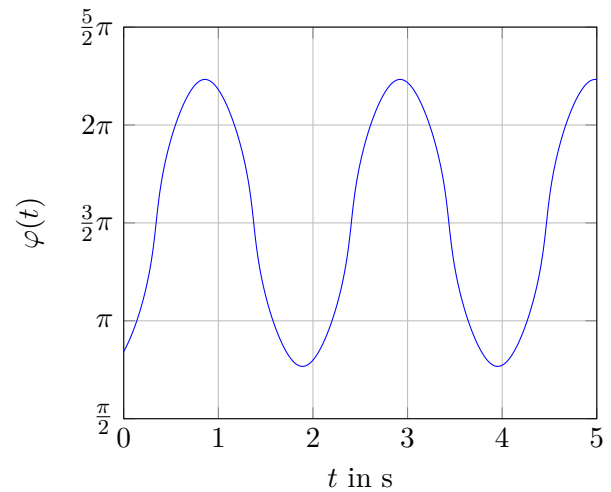
Die berechnete Lösung ist offensichtlich eine Schwingung, siehe Abb. 4b. D. h. die Lösung lässt sich trotz der Berührung des Bodens als freie Schwingung eines Pendels interpretieren, dessen Fußpunkt mit einem Loslager befestigt ist. Dazu sollte das Pendel jedoch die Ebene des Lagers in vertikaler Richtung durchdringen können. Dies kann bspw. durch einen Schlitz in der Bodenplatte und eine entsprechende Führung der Leiter auf einer Schiene konstruktiv realisiert werden. Die Mittelwert der Schwingung ist gegeben durch $3\pi/2$, was der stabilen Ruhelage des Pendels entspricht. Die Kraft im Lager ist in Abb. 4c dargestellt. Die Kraft ist strikt positiv und oszilliert ebenfalls. D. h. der Punkt A ist stets in Kontakt zum Boden. Bei genauer Betrachtung in der Nähe der Maxima stellt sich heraus, dass die Lagerkraft dort ebenfalls beschränkt und glatt ist.

Listing 1: Numerische Integration von Gl. (26) mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren.

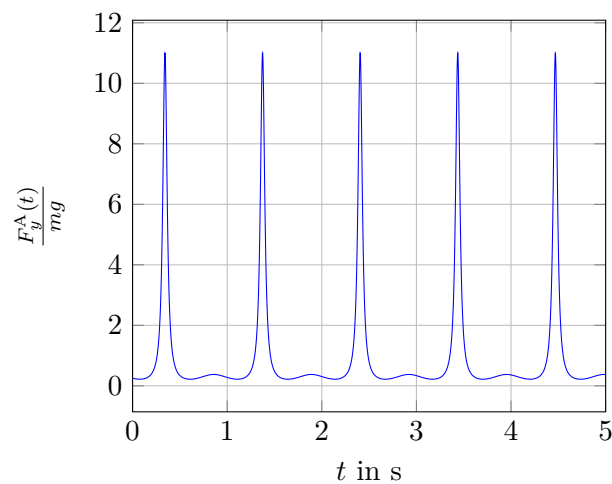
```
# -*- coding: utf-8 -*-
from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
from numpy import sqrt, sin, cos, arcsin, pi
import matplotlib.pyplot as plt
# vorherige Plots schliessen
plt.close("all")
# Laenge l
l = 0.1
# Verhaeltnis g / l
gamma = 10.0
# rechte Seite der Dgl.; Gleichungen (23)
def rhsFunction(t, Z):
    global gamma, l
```



(a) Position des Kontaktpunktes A.



(b) Zeitlicher Verlauf des Winkels.



(c) Zeitlicher Verlauf des Lagerkraft F_y^B .

Abb. 4: Numerische Lösungen von Gl. (26) für $g/\ell = 10 \text{ m s}^{-2}$ und $\ell = 0,1 \text{ m}$.

```
f = np.zeros((4,))
# Zustandsgrößen: Z = [xA, vA, phi, alpha]
phi = Z[2]
alpha = Z[3]
# Hilfsgröße
factor = cos(phi) / (1. + 3. * cos(phi)**2)
# Gleichung (23a)
f[0] = Z[1]
# Gleichung (23b)
f[1] = 1 * factor * (2. * alpha**2 - 3. * gamma * sin(phi))
# Gleichung (23c)
f[2] = alpha
# Gleichung (23d)
f[3] = 3. * factor * (alpha**2 * sin(phi) - 2. * gamma)
return f
# Startzeit
t0 = 0.
# Endzeit
```

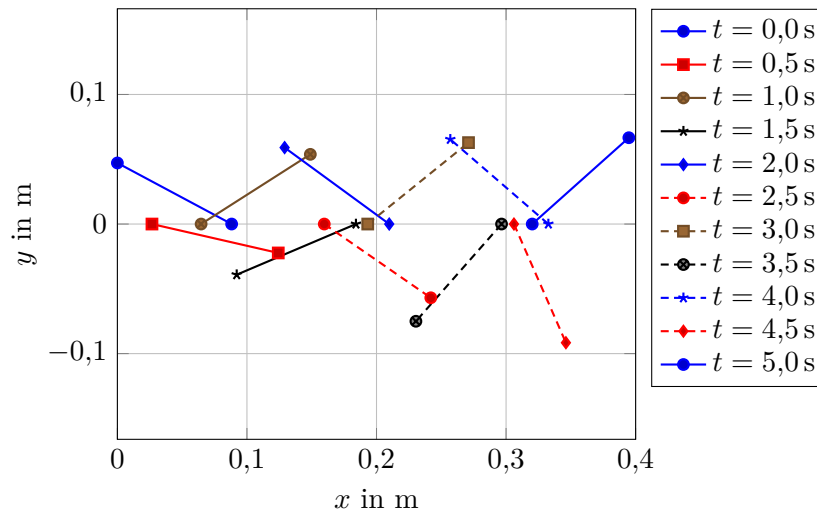



Abb. 5: Position der Leiter zu ausgewählten Zeitpunkten für $g/\ell = 10 \text{ m s}^{-2}$ und $\ell = 0,1 \text{ m}$.

```
t1 = 5.0
# Schrittweite der Ausgabe
dt = 0.001
# Ausgabezeitpunkte
t_eval = np.arange(t0, t1+dt, dt)
# Initialisieren des Anfangszustands
Z0 = np.zeros((4,))
# Anfangswinkel phi; Gleichung (14)
phi0 = pi - arcsin( sqrt(2.) / 3.)
Z0[2] = phi0
# Anfangswinkelgeschwindigkeit; Gleichung (10) mit a = 1/2
phi_dot0 = sqrt(3. / sqrt(2) * gamma) * sqrt(1. - sqrt(2.) * sin(phi0))
Z0[3] = phi_dot0
# Anfangsposition x^A; Gleichung (1)
Z0[0] = 1 * cos(pi - phi0)
# Anfangsgeschwindigkeit v^A; Ableitung von Gleichung (1)
Z0[1] = 1 * phi_dot0 * sin(phi0)
# Integration der Differentialgleichungen
sol = solve_ivp(rhsFunction, (t0, t1), Z0, rtol=1e-12, atol=1e-15,
t_eval=t_eval)
# Auslesen der Loesung
xA = sol.y[0]
phi = sol.y[2]
phi_dot = sol.y[3]
t = sol.t
# Plotten der Loesung
plt.figure()
plt.subplot(3,1,1)
plt.grid()
plt.plot(sol.t, xA)
plt.ylabel("$x^{\mathrm{A}}$")
plt.subplot(3,1,2)
plt.grid()
plt.plot(sol.t, phi)
plt.plot(sol.t, pi*np.ones_like(sol.t),'--')
plt.ylabel("$\phi(t)$")
plt.subplot(3,1,3)
plt.grid()
plt.plot(sol.t, phi_dot)
```

```
plt.xlabel("Zeit_[s]")
plt.ylabel("$\dot{\phi}(t)$")
# Berechnung der Positionen der Punkte A und B
yA = np.zeros_like(xA)
xB = xA + l * cos(phi)
yB = l * sin(phi)
# Berechnung der Lagerkraft
phi_dotdot = 3.* cos(phi) / (1. + 3. * cos(phi)**2) * (phi_dot**2 * sin(phi) - 2. *
    gamma )
fby = 1. + 1./(2. * gamma ) * (phi_dotdot * cos(phi) - phi_dot**2 * sin(phi))
# Plot der Position xB
plt.figure()
plt.plot(sol.t, xB)
plt.ylabel("$x^{\mathrm{B}}$")
plt.grid()
# Ausgabe als csv-Datei
outputWerte = np.vstack((sol.t, xA, phi, phi_dot, fby)).T
np.savetxt('LeiterLoesung.csv', outputWerte, fmt='%1.6e', delimiter=",")
outputPosition = np.vstack((xA, yA, xB, yB)).T
outputPosition = outputPosition[0::500,:]
np.savetxt('LeiterPositionen.csv', outputPosition, fmt='%1.6e', delimiter=",")
```