Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Abbildung 1 stellt den Freischnitt des Gesamtsystems dar. Alle Rohre haben den gleichen Durchmesser. Deshalb ist der Radius aller im Freischnitt dargestellten Kreise r. Die Widerstandskräfte werden

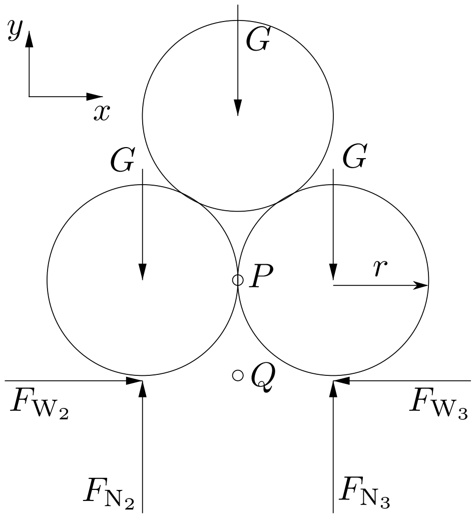

Abb. 1: Freischnitt des Gesamtsystems.

entgegen der gedachten infinitesimalen Bewegungsrichtung eingezeichnet. Das obere Rohr würde die beiden unteren Rohre nach außen drücken. Das heißt, dass das linke untere Rohr sich nach links, also in negative x-Richtung, gleiten würde und das rechte untere Rohr nach rechts, also in positive x-Richtung. Entsprechend sind die jeweiligen Widerstandskräfte im Freischnitt entgegengesetzt eingezeichnet. Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen ergibt:

$$\sum M^{(Q)} = Gr - Gr - F_{\mathrm{N}_2} r + F_{\mathrm{N}_3} r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{N}_3} = F_{\mathrm{N}_2} \ ,$$
$$\sum M^{(P)} = Gr - Gr - F_{\mathrm{N}_2} r + F_{\mathrm{N}_3} r + F_{\mathrm{W}_2} r - F_{\mathrm{W}_3} r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{W}_3} = F_{\mathrm{W}_2} \ ,$$
$$\sum F_y = F_{\mathrm{N}_2} + F_{\mathrm{N}_3} - 3G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{N}_2} = F_{\mathrm{N}_3} = \frac{3}{2} G \ .$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen des Gesamtsystems konnten die Normalkräfte bestimmt werden. Die Widerstandskräfte F_{W_i} sind jedoch noch nicht bestimmt worden. Für die vier unbekannten Kontaktkräfte liegen lediglich drei Gleichungen vor. Deshalb wird die linke untere Röhre frei geschnitten.

Der Freischnitt der linken unteren Röhre ist in Abb. 2 dargestellt. Die zwei unteren Röhren berühren sich nicht. Daher wirken zwischen ihnen auch keine Kontaktkräfte. Die Schwerpunkte der Röhren bilden ein gleichseitiges Dreieck. Deshalb ist ein Winkel von 30° in Abb. 2 eingezeichnet. Die Widerstandskraft, die zwischen der oberen Röhre und der linken unteren Röhre wirkt, wurde wiederum entgegen der gedachten infinitesimalen Bewegung eingezeichnet. Die obere Röhre bewegt sich tangential zur unteren Röhre nach unten. Die Widerstandskraft, welche auf die obere Röhre wirkt, zeigt deshalb tangential (nach oben) entgegen dieser gedachten Bewegung. Aufgrund des dritten Newtonschen Gesetzes zeigt die Widerstandskraft, welche auf die linke untere Röhre wirkt, tangential (nach unten) in Richtung dieser gedachten Bewegung. Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen

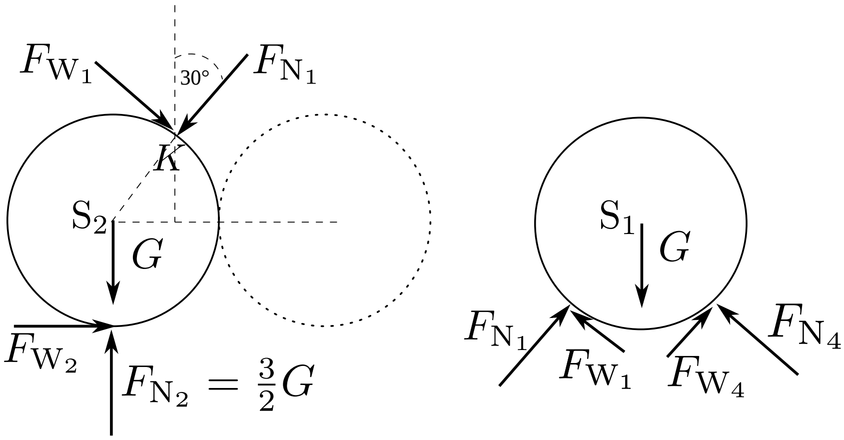

Abb. 2: Freischnitt der linken unteren und der oberen Röhre.

ergibt:

$$\sum M^{(K)} = F_{W_2}\left(r + r\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2}G\frac{r}{2} + G\frac{r}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{W_2} = \frac{G}{4+2\sqrt{3}}\ ,$$

$$\sum M^{(S)} = F_{W_2}r - F_{W_1}r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{W_1} = F_{W_2} = \frac{G}{4+2\sqrt{3}}\ ,$$

$$\sum F_H = F_{W_2} + F_{W_1}\frac{\sqrt{3}}{2} - F_{N_1}\frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{N_1} = 2F_{W_2} + F_{W_1}\sqrt{3} = F_{W_1}(2+\sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad F_{N_1} = \frac{G}{2}\ .$$

Somit sind alle Kontaktkräfte in Abhängigkeit der gegebenen Größen bestimmt. Aufgrund der Symmetrie muss das rechte Teilsystem nicht betrachtet werden.

Zur Bestimmung der Haftreibungskoeffizienten $\mu_{H,i}$ wird das Coulombsche Gesetz genutzt. Im Grenzfall gilt die Bedingung $F_{W_i} = \mu_{H_i}F_{N_i}$. Damit folgt für $\mu_{H,1}$:

$$F_{W_1} = \mu_{H_1}F_{N_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{G}{4+2\sqrt{3}} = \mu_{H_1}\frac{G}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{H_1} = \frac{2}{4+2\sqrt{3}} \approx 0{,}268\,.$$

Für $\mu_{H,2}$ ergibt sich:

$$F_{W_2} = \mu_{H,2}F_{N_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{G}{4+2\sqrt{3}} = \mu_{H,2}\frac{3}{2}G \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{H,2} = \frac{2}{12+6\sqrt{3}} \approx 0{,}089\ .$$

2. Aufgabe

a) Aus System 1 folgt:

$$\sum M^{(A)} = -F_c a + F_{N_1}b - F_{W_1}h \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad F_c = \frac{F_{N_1}b - F_{W_1}h}{a}\ . \tag{1}$$

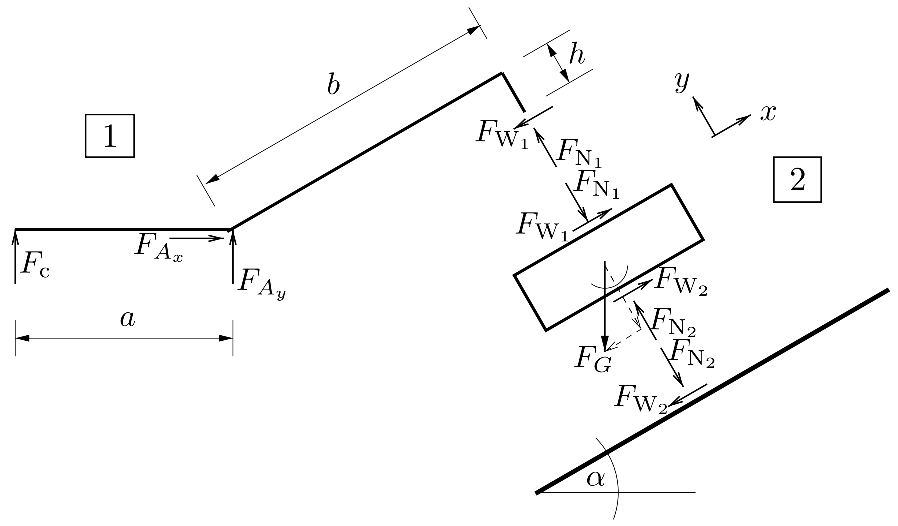

Abb. 3: Freischnitt der zwei Systeme

Aus System 2 folgt:

$$\sum F_x = F_{W_1} + F_{W_2} - F_G \sin\alpha \overset{!}{=} 0 \ , \tag{2}$$

$$\sum F_y = F_{N_1} - F_{N_2} + F_G \cos\alpha \overset{!}{=} 0 \ . \tag{3}$$

Für die Haftkräfte gilt:

$$F_{W_1} = \mu_H F_{N_1} \ , \qquad F_{W_2} = \mu_H F_{N_2} \ . \tag{4}$$

Setzt man Gl. (4) in Gl. (2) ein, ergibt sich:

$$\mu_H F_{N_1} + \mu_H F_{N_2} = F_G \sin\alpha \ . \tag{5}$$

Um die nicht benötigte Variable F_{N_2} zu eliminieren, wird Gl. (5) mit $\mu_H \cdot (3)$ summiert:

$$2\mu_H F_{N_1} + F_G(\mu_H \cos\alpha - \sin\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{N_1} = \frac{F_G(\sin\alpha - \mu_H\cos\alpha)}{2\mu_H} \ . \tag{6}$$

Eingesetzt in (1):

$$F_c = \frac{F_{N_1}(b - \mu_H h)}{a} = \frac{F_G(\sin\alpha - \mu_H\cos\alpha)(b - \mu_H h)}{2\mu_H a} \ , \tag{7}$$

d. h., eine Federkraft $F_c = \frac{F_G}{2a}\left(\frac{b}{\mu_H} - h\right)(\sin\alpha - \mu_H\cos\alpha)$ wird ausreichen, um den Block zu halten.

b) Wenn eine Selbstsperrung auftritt, wird die Feder auch ohne Vorspannung den Block stoppen, d. h., die Federkraft kann gegen null gehen, z. B. wenn die geometrische Bedingung

$$\frac{b}{\mu_H} - h = 0 \quad \Rightarrow \quad b = h\mu_H \tag{8}$$

erfüllt ist.

c) Ein anderer möglicher Fall für die Selbstsperrung wäre

$$\sin\alpha - \mu_\mathrm{H}\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \mu_\mathrm{H} \ , \tag{9}$$

in dem, wieder ohne Vorspannung der Feder, der Block festgehalten wird.

Hausaufgaben

3. Aufgabe

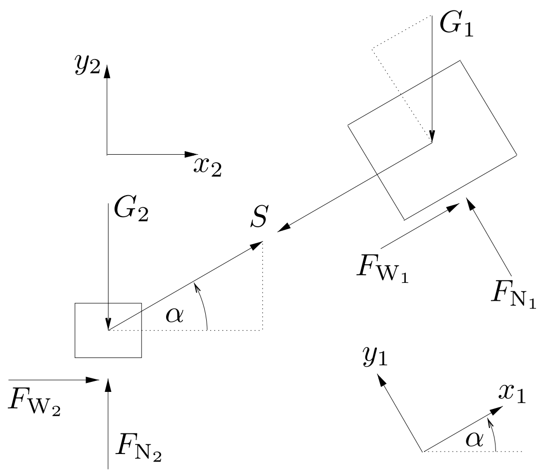

Abb. 4: Freischnitt

a) Klotz 1:

$$\sum F_{x_1} = F_{W_1} - S - G_1 \sin\alpha = 0$$
$$\Rightarrow F_{W_1} = S + G_1 \sin\alpha \ ,$$
$$\sum F_{y_1} = F_{N_1} - G_1 \cos\alpha = 0$$
$$\Rightarrow F_{N_1} = G_1 \cos\alpha \ .$$

Klotz 2:

$$\sum F_{x_2} = F_{W_2} + S\cos\alpha = 0$$
$$\Rightarrow F_{W_2} = -S\cos\alpha \ ,$$
$$\sum F_{y_2} = F_{N_2} - G_2 + S\sin\alpha = 0$$
$$\Rightarrow F_{N_2} = G_2 - S\sin\alpha \ .$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Für die Haftkräfte gilt die Bedingung:

$$F_{\mathrm{W}_1} \leq \mu_{\mathrm{H}} F_{\mathrm{N}_1} \ , \tag{1}$$
$$F_{\mathrm{W}_2} \leq \mu_{\mathrm{H}} F_{\mathrm{N}_2} \ . \tag{2}$$

Setzt man die Gleichgewichtsbedingungen in (1) und (2) ein, so folgt:

$$G_1 \sin\alpha + S \leq \mu_{\mathrm{H}} G_1 \cos\alpha \, ,$$
$$\Leftrightarrow \quad S \leq G_1(\mu_{\mathrm{H}} \cos\alpha - \sin\alpha) \, , \tag{3}$$

sowie

$$-S\cos\alpha \leq \mu_{\mathrm{H}}(G_2 - S\sin\alpha) \, ,$$
$$\Leftrightarrow \quad S \geq \frac{-\mu_{\mathrm{H}} G_2}{(\cos\alpha - \mu_{\mathrm{H}} \sin\alpha)} \ . \tag{4}$$

Beachten, dass sich im letzten Schritt die Ungleichung aufgrund einer Multiplikation mit -1 umgedreht hat. (3) und (4) liefern:

$$-\frac{\mu_{\mathrm{H}} G_2}{\cos\alpha - \mu_{\mathrm{H}} \sin\alpha} \leq S \leq G_1(\mu_{\mathrm{H}} \cos\alpha - \sin\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{G_1}{G_2}(\mu_{\mathrm{H}} \cos\alpha - \sin\alpha) \geq -\frac{\mu_{\mathrm{H}}}{\cos\alpha - \mu_{\mathrm{H}} \sin\alpha} \ .$$

Mehr kann an dieser Stelle zum Verhältnis von G_1 zu G_2 nicht gesagt werden, da unklar ist, ob $\mu_{\mathrm{H}} \cos\alpha - \sin\alpha$ größer oder kleiner als Null ist.

b) Spezialfall: $\mu_{\mathrm{H}} = 0{,}5$ und $\alpha = 45°$.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich feststellen, dass $\mu_{\mathrm{H}} \cos\alpha - \sin\alpha$ größer als Null ist. Dann:

$$\frac{G_1}{G_2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\frac{G_1}{G_2} \leq 4 \ .$$

4. Aufgabe

a) Wand bei Punkt A ist rau. Bestimmung der Lagerreaktionen:

$$\sum F_v = 0 = F - F_{\mathrm{N}_A} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{N}_A} = F \ , \tag{1}$$
$$\sum M^{(A)} = 0 = -Fx + F_{\mathrm{N}_B} h \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{N}_B} = F\frac{x}{h} \ , \tag{2}$$
$$\sum F_h = 0 = F_{\mathrm{W}_A} - F_{\mathrm{N}_B} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{W}_A} = F_{\mathrm{N}_B} = F\frac{x}{h} \ . \tag{3}$$

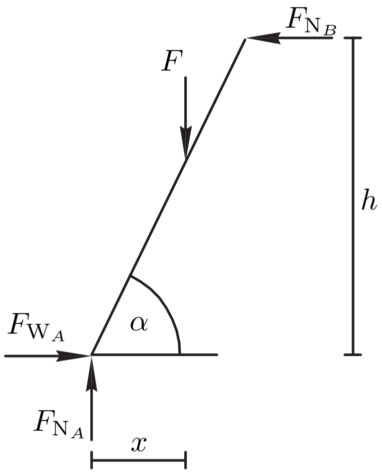

Abb. 5: Freischnitt A rau

Haftungsbedingung in A:

$$|F_{W_A}| \leq \mu_0 F_{N_A} \tag{4}$$
$$F\frac{x}{h} \leq \mu_0 F \tag{5}$$
$$\Rightarrow x \leq \mu_0 h \; . \tag{6}$$

b) Wand bei Punkt B ist rau.

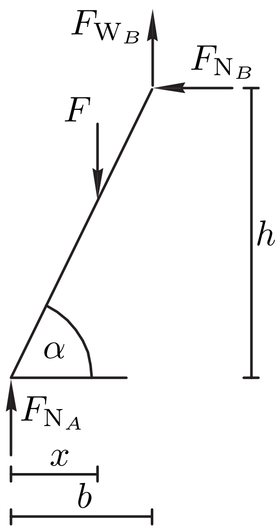

Abb. 6: Freischnitt B rau

Bestimmung von F_{N_B}:

$$\sum F_h = 0 = F_{N_B} \quad \Rightarrow \quad F_{N_B} = 0 \; . \tag{7}$$

Haftungsbedingung in B:

$$|F_{\mathrm{W}_B}| \leq \mu_0 F_{\mathrm{N}_B} \tag{8}$$
$$|F_{\mathrm{W}_B}| \leq \mu_0 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{W}_B} = 0\ . \tag{9}$$

Momentengleichgewicht um A:

$$\sum M^{(A)} = 0 = Fx \quad \Rightarrow \quad x = 0\ . \tag{10}$$