Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Der Gesamtumschlingungswinkel γ des Seils um die Rollen ist die Summe der einzelnen Umschlingungswinkel und ist $\gamma = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$.

Nun ist eine Fallunterscheidung notwendig: Wo sind die Last- und Halteseite?

- **Fall A:** Die Lastseite ist bei der Masse M, die Halteseite bei der Masse m.

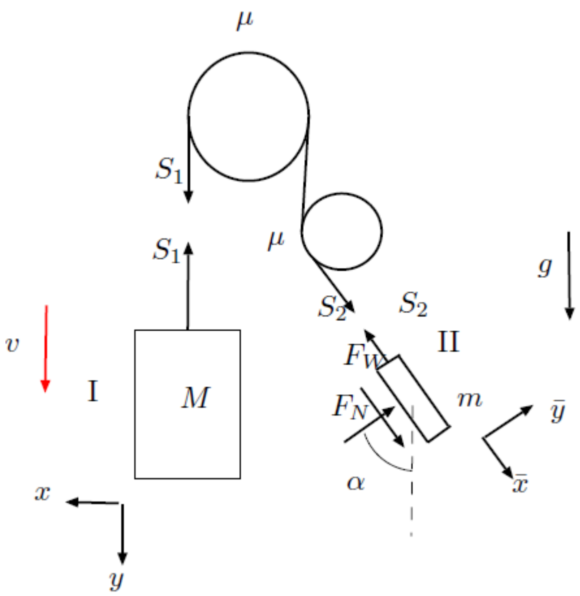

Abb. 1: Freischnitt Fall A

Gleichgewichtsbedingungen:

System I:

$$\sum F_y = Mg - S_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = Mg \tag{1}$$

System II:

$$\sum F_{\bar{x}} = mg\sin\alpha + F_{\mathrm{W}} - S_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow S_2 = mg\sin\alpha + F_{\mathrm{W}} \tag{2}$$

$$\sum F_{\bar{y}} = F_{\mathrm{N}} - mg\cos\alpha \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow F_{\mathrm{N}} = mg\cos\alpha \tag{3}$$

Reibungsgesetze: (Betrachtet wird der Grenzfall, in dem das System sich noch genau im Gleichgewicht befindet)

System II:

$$F_{\mathrm{W}} = F_{\mathrm{N}}\mu \tag{4}$$

System III:

$$S_1 \leq S_2 e^{\mu\gamma} = S_2 e^{\frac{4}{3}\mu\pi} \tag{5}$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) erhält man:

$$S_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \tag{6}$$

(1) und (6) in (5):

$$Mg = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)e^{\frac{4}{3}\mu\pi} \quad \Rightarrow \quad M = m\left(\sin\frac{\pi}{6} + \mu\cos\frac{\pi}{6}\right)e^{\frac{4}{3}\mu\pi} \tag{7}$$

Die maximale Seilkraft ist in diesem Fall die Seilkraft S_1:

$$S_{\max} = S_1 = Mg = mg\left(\sin\frac{\pi}{6} + \mu\cos\frac{\pi}{6}\right)e^{\frac{4}{3}\mu\pi} \tag{8}$$

- **Fall B:** Die Lastseite ist bei Gewicht m, die Halteseite bei Gewicht M.
  Beim Freischnitt ändert sich die Richtung der Widerstandskraft F_W:

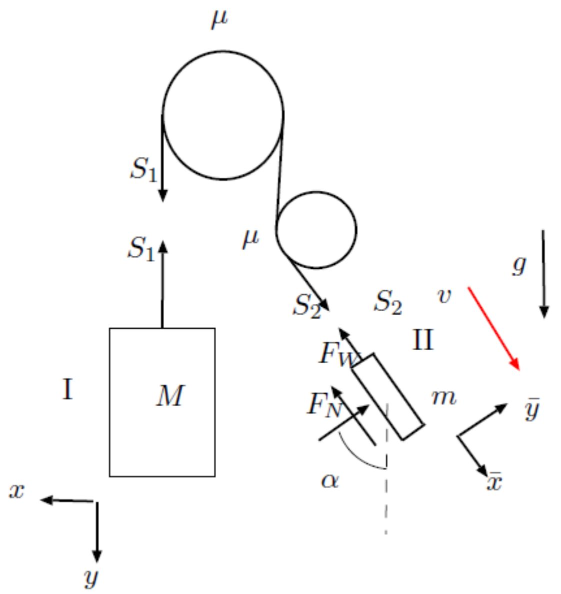

Abb. 2: Freischnitt Fall B

Die Gleichungen (2) und (5) ändern sich im Vergleich zu Fall A:

System II:

$$\sum F_{\bar{x}} = mg\sin\alpha - F_W - S_2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = mg\sin\alpha - F_W \tag{9}$$

System III:

$$S_2 = S_1 e^{\mu\gamma} = S_1 e^{\frac{4}{3}\mu\pi} \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 e^{-\frac{4}{3}\mu\pi} \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (3), (4) und (9) folgt:

$$S_2 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha\ . \tag{11}$$

Gleichungen (1) und (11) in (10) einsetzen:

$$Mg = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)e^{-\frac{4}{3}\mu\pi} \quad \Rightarrow \quad M = m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)e^{-\frac{4}{3}\mu\pi} \tag{12}$$

Die maximale Seilkraft ist in diesem Fall die Seilkraft S_2:

$$S_{\max} = S_2 = Mge^{\frac{4}{3}\mu\pi} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \tag{13}$$

2. Aufgabe

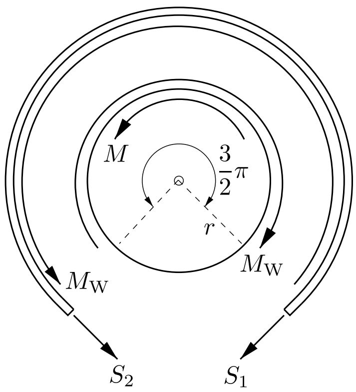

Abb. 3: Freischnitt Bremsscheibe. Warnung: dieser Freischnitt ist unvollständig und nur gültig in Bezug auf eine Momentenbilanz am Lager!

a) Das Reibmoment ergibt sich aus der mit dem Hebelarm r wirkenden Seilreibungskraft F_{W}.

$$M_{\mathrm{W}} = rF_{\mathrm{W}} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{W}} = \frac{60\ \mathrm{Nm}}{0{,}15\ \mathrm{m}} = 400\ \mathrm{N}\ .$$

b) Das Bremsmoment wirkt entgegengesetzt der Bewegungsrichtung. Aus dem Momentengleichgewicht des Seiles um das Lager folgt:

$$\sum M_S^L \stackrel{!}{=} 0 = M_W + rS_2 - rS_1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 + F_{\mathrm{W}}$$

Wegen der Seilreibung kann nach Eytelwein folgende Beziehung zwischen den Seilkräften notiert werden:

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha}$$

Aus Kraftgesetz und Momentengleichgewicht folgt die Seilkraft am ablaufenden Seil:

$$S_2 e^{\mu\alpha} = S_2 + F_W \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{F_W}{e^{\mu\alpha} - 1} = \frac{400\ \mathrm{N}}{e^{0{,}25\frac{3}{2}\pi} - 1} = 177{,}9\ \mathrm{N}\ .$$

Dieses Ergebnis ins Momentengleichgewicht eingesetzt liefert die Seilkraft am auflaufenden Seil:

$$S_1 = 177{,}9\ \mathrm{N} + 400\ \mathrm{N} = 577{,}9\ \mathrm{N}\ .$$

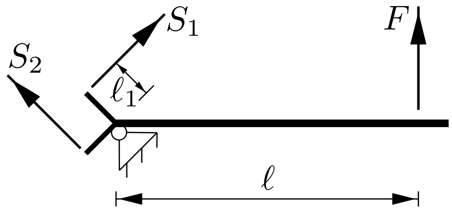

Abb. 4: Freischnitt Hebel.

c) Aus dem Momentengleichgewicht des Hebels um das Festlager:

$$\sum M_H^L \stackrel{!}{=} 0 = F\ell - S_1\ell_1 - S_2\ell_1$$

ergibt sich die benötigte Kraft F.

$$F = (S_1 + S_2)\frac{\ell_1}{\ell} = 151{,}2\ \mathrm{N}\ .$$

Anmerkung: Die Drehrichtung hat keinen Einfluss, da die Längen vom Lager bis zum Angriffspunkt des Seils gleich sind, nämlich ℓ_1. Somit können in die obige Gleichung die Seilkräfte ausgetauscht werden, ohne dass eine größere Hebelkraft für die gleiche Bremswirkung aufgebracht werden müsste.

Hausaufgaben

3. Aufgabe

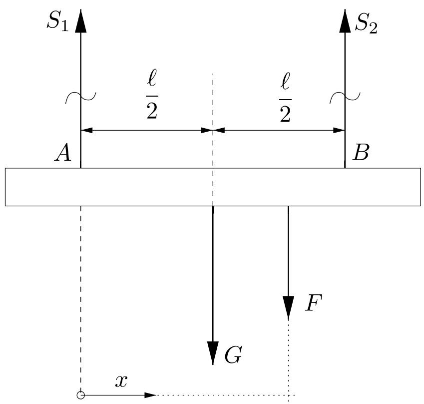

Abb. 5: Freischnitt

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{vertikal:} \quad S_1 + S_2 = G + F \tag{1}$$

$$\text{um B:} \quad -S_1\ell + \frac{1}{2}G\ell + F(\ell - x) = 0 \tag{2a}$$

$$\text{um A:} \quad S_2\ell - Fx - \frac{1}{2}G\ell = 0 \tag{2b}$$

Anmerkung: Die dritte Gleichung liefert keine zusätzliche Information gegenüber der zweiten. Für die drei Unbekannten S_1, S_2 und x stehen daher bisher nur zwei Gleichungen zur Verfügung. Das Problem kann man nicht nur mit diesen Gleichungen lösen.

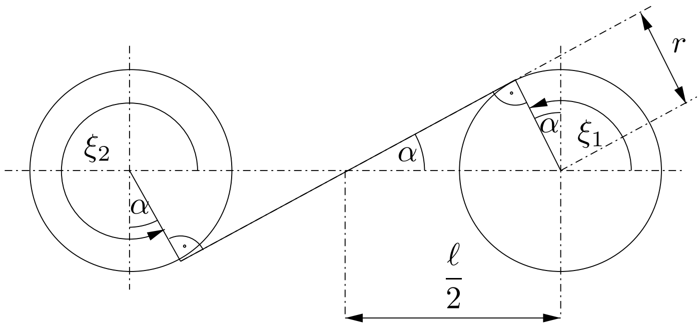

Abb. 6: Geometrischer Zusammenhang

Für den Umschlingungswinkel γ folgt aus der Geometrie:

$$\xi_2 = \alpha + \frac{3\pi}{2}, \quad \xi_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{\frac{\ell}{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{2r}{\ell}$$

$$\Rightarrow \gamma = \xi_1 + \xi_2 = 2\alpha + 2\pi \tag{3}$$

Fall 1:

Wenn $x \geq \frac{\ell}{2}$, dann folgt

$$S_1 \leq S_2 = S_1 e^{\mu\gamma} \tag{4}$$

(4) in (1) liefert:

$$S_1 + S_1 e^{\mu\gamma} = G + F$$

$$S_1\psi = G + F \text{ mit } \quad \psi := 1 + e^{\mu\gamma}$$

$$S_1 = \frac{G + F}{\psi}\ . \tag{5}$$

(5) in (2a) liefert:

$$\frac{G+F}{\psi}\ell = G\frac{\ell}{2} + F(\ell - x)$$
$$l - x = \left(\frac{2(G+F) - G\psi}{2F\psi}\right)\ell$$
$$-x = \left(\frac{2(G+F) - G\psi}{2F\psi} - 1\right)\ell$$
$$x_1 = \left(\frac{G(\psi - 2) - 2F}{2F\psi} + 1\right)\ell \tag{6}$$

a) Speziell $F = \frac{G}{2}$ in (6) mit $\psi = 1 + e^{\mu\gamma}$:

$$x_1 = \left(\frac{G(\psi - 2 - 1)}{G\psi} + 1\right)\ell$$

Für Fall 1 gilt somit:

$$\boxed{\frac{l}{2} \leq x_1 \leq l + \frac{\psi - 3}{\psi} l}$$

$$\gamma \to \infty : \lim_{\gamma\to\infty} \left(\ell + \frac{\psi - 3}{\psi}\ell\right) = 2\ell \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq 2\ell$$
$$\mu \to 0 : \lim_{\mu\to 0} \left(\ell + \frac{\psi - 3}{\psi}\ell\right) = \frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\ell}{2}$$

b) speziell $G = 0$ in (6) mit $\psi = 1 + e^{\mu\gamma}$:

$$x_1 = \left(\frac{-2F}{2F\psi} + 1\right)\ell$$

$$\boxed{\frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq \left(\frac{\psi - 1}{\psi}\right)}$$

$$\gamma \to \infty : \lim_{\gamma\to\infty} \left(\frac{\psi - 1}{\psi}\right)\ell = \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq \ell$$
$$\mu \to 0 : \lim_{\mu\to 0} \left(\frac{\psi - 1}{\psi}\right)\ell = \frac{\ell}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\ell}{2}$$

Fall 2: *(Eine Symmetrie zu Fall 1 ist zu erwarten)*

Wenn $x \leq \frac{\ell}{2}$, dann folgt:

$$S_2 \leq S_1 = S_2 e^{\mu\gamma} \tag{7}$$

(7) in (1):

$$S_2 + S_2 e^{\mu\gamma} = G + F \quad \Rightarrow \quad S_2\psi = G + F \tag{8}$$

(8) in (2b):

$$\begin{aligned} \frac{G+F}{\psi}\ell &= \frac{G\ell}{2} + Fx \\ Fx &= \Big(\frac{2(G+F) - G\psi}{2\psi}\Big)\ell \\ x_2 &= \Big(\frac{G(2-\psi) + 2F}{2F\psi}\Big)\ell \end{aligned} \tag{9}$$

Der Vergleich (9) mit (6) liefert entsprechend den Überlegungen von oben speziell für $F = \frac{G}{2}$:

$$\boxed{-\frac{\psi - 3}{\psi} l \leq x_2 \leq \frac{l}{2}}$$

$$\begin{aligned} \gamma \to \infty: &\quad -\ell \leq x_2 \leq \frac{\ell}{2} \\ \mu \to 0: &\quad x_2 = \frac{\ell}{2} \end{aligned}$$

und speziell für $G = 0$:

$$\boxed{\frac{1}{\psi}\ell \leq x_2 \leq \frac{\ell}{2}}$$

$$\begin{aligned} \gamma \to \infty: &\quad 0 \leq x_2 \leq \frac{\ell}{2} \\ \mu \to 0: &\quad x_2 = \frac{\ell}{2} \end{aligned}$$

Um unsere Überlegungen und Berechnungen zusammenzufassen, kann man das Angriffsfeld für F mit den betrachteten Spezialfällen darstellen: