Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Die (homogene) Knickdifferentialgleichung lautet:

$$\boxed{w^{IV}(x) + \alpha^2 w''(x) = 0 \qquad \text{mit } \alpha^2 := \frac{F}{EI}}\,. \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung und dessen Ableitungen lauten:

$$w(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\alpha x + D\,, \tag{2}$$
$$w'(x) = -A\alpha\sin(\alpha x) + B\alpha\cos(\alpha x) + C\alpha\,, \tag{3}$$
$$w''(x) = -A\alpha^2\cos(\alpha x) - B\alpha^2\sin(\alpha x)\,, \tag{4}$$
$$w'''(x) = A\alpha^3\sin(\alpha x) - B\alpha^3\cos(\alpha x)\,, \tag{5}$$
$$w^{IV}(x) = A\alpha^4\cos(\alpha x) + B\alpha^4\sin(\alpha x)\,. \tag{6}$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C, D werden vier Randbedingungen benötigt. Wir machen erstmal einen Freischnitt bei $x = \ell$, da die Randbedingungen hier etwas schwieriger als bei $x = 0$ zu ermitteln sind: Als abkürzende Schreibweise werden alle Größen, die an der Stelle $x = \ell$

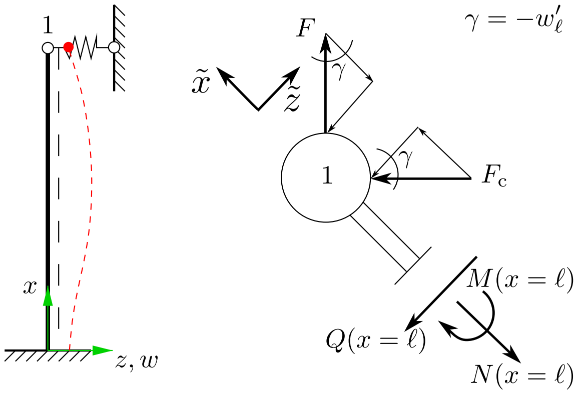

Abb. 1: Freischnitt am ausgelenkten System bei $x = \ell$.

ausgewertet werden, mit dem Index ℓ gekennzeichnet, also z. B. schreiben wir $w_\ell := w(x = \ell)$. Die Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Querkraft liefert:

$$\sum F_{\tilde{z}} = -Q_\ell - F\sin\gamma - F_c\cos\gamma = 0\,.$$

Mit dem Federgesetz $F_c = c_F w_\ell$ ergibt sich:

$$Q_\ell + F\sin\gamma + c_F w_\ell\cos\gamma = 0\,.$$

Die Linearisierungen: $\sin(\gamma) \cong \gamma = -w'_\ell$ und $\cos\gamma \cong 1$ ergibt dann:

$$Q_\ell - Fw'_\ell + c_F w_\ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -EIw'''_\ell - Fw'_\ell + c_F w_\ell = 0\,. \tag{RB 1}$$

Das Momentengleichgewicht liefert:

$$\sum M^{(1)} = 0 = -M_\ell \quad \Leftrightarrow \quad -EIw''_\ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w''_\ell = 0\,. \tag{RB 2}$$

An der Stelle $x = 0$ erkennt man sofort:

$$w(x=0) = 0\,, \qquad w'(x=0) = 0\,. \tag{RB 3,4}$$

Einsetzen der Randbedingungen (RB 1) bis (RB 4) in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung liefert das folgende lineare homogene Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten A, B, C und D:

$$\begin{aligned} -EI\left(A\alpha^3\sin(\alpha\ell) - B\alpha^3\cos(\alpha\ell)\right) - F(-A\alpha\sin(\alpha\ell) + B\alpha\cos(\alpha\ell) + C\alpha) +& \\ + c_F(A\cos(\alpha\ell) + B\sin(\alpha\ell) + C\alpha\ell + D) = 0\,,& \qquad (7)\\ -A\alpha^2\cos(\alpha\ell) - B\alpha^2\sin(\alpha\ell) = 0\,,& \qquad (8)\\ A\cos(0) + B\sin(0) + C\cdot 0 + D = 0\,,& \qquad (9)\\ -A\alpha\sin(0) + B\alpha\cos(0) + C\alpha = 0\,.& \qquad (10) \end{aligned}$$

Teilt man nun noch die erste Gleichung durch EI und berücksichtigt, dass per Definition $\frac{F}{EI} =: \alpha^2$ gilt, so erhält man das folgende Gleichungssystem, hier nun in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \frac{c_F}{EI}\cos(\alpha\ell) & \frac{c_F}{EI}\sin(\alpha\ell) & \frac{c_F}{EI}\alpha\ell - \alpha^3 & \frac{c_F}{EI} \\ \alpha^2\cos(\alpha\ell) & \alpha^2\sin(\alpha\ell) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,. \tag{11}$$

Das System hat nur dann eine nicht triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix (sie sei hier $\underline{\underline{M}}$ genannt) Null ist. Die Berechnung der Determinante erfolgt durch Laplace-Entwicklung nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{M}}) &= 1\begin{vmatrix} \frac{c_F}{EI}\sin(\alpha\ell) & \frac{c_F}{EI}\alpha\ell - \alpha^3 & \frac{c_F}{EI} \\ \alpha^2\sin(\alpha\ell) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} \frac{c_F}{EI}\cos(\alpha\ell) & \frac{c_F}{EI}\sin(\alpha\ell) & \frac{c_F}{EI}\alpha\ell - \alpha^3 \\ \alpha^2\cos(\alpha\ell) & \alpha^2\sin(\alpha\ell) & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{c_F}{EI}\alpha^2\sin(\alpha\ell) - \frac{c_F}{EI}\cos(\alpha\ell)\alpha^2\sin(\alpha\ell) - \left(\frac{c_F}{EI}\alpha\ell - \alpha^3\right)\alpha^2\cos(\alpha\ell) + \\ &\qquad + \alpha^2\cos(\alpha\ell)\frac{c_F}{EI}\sin(\alpha\ell) \end{aligned} \tag{12}$$

Die charakteristische Gleichung lautet somit:

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{M}}) \overset{!}{=} 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{c_F}{EI}\frac{\alpha^2\sin(\alpha\ell)}{\alpha^2\cos(\alpha\ell)} = \left(\frac{c_F}{EI}\alpha\ell - \alpha^3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{c_F}{EI}\tan(\alpha\ell) = \frac{c_F}{EI}\alpha\ell - \alpha^3 = 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Diese nichtlineare Gleichung müsste für den allgemeinen Fall numerisch gelöst werden. Im Folgenden sollen nun zwei Spezialfälle betrachtet werden:

a) Gleitlager in Knoten 2 (3. Euler-Fall): Das heißt $c_F \to \infty$. Die charakteristische Gleichung lautet somit:

$$\tan(\alpha\ell) = \alpha\ell \tag{14}$$

Die numerische Lösung ergibt

$$\alpha\ell = 4{,}4934 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = EI\alpha^2 = 4{,}4934^2 \frac{EI}{\ell^2} = 20{,}19 \frac{EI}{\ell^2} \tag{15}$$

Die zugehörige Eigenform ist in Abb. 2 skizziert.

Abb. 2: Graphische Darstellung der Eigenform des 3. EULER-Falls.

b) Freies Ende am Knoten 2 (1. EULER-Fall): Das heißt $c_F \to 0$. Aus Gl. (13) folgt unmittelbar $\cos(\alpha\ell) = 0$. Dies gilt für $\alpha\ell = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi$; der kleinste Eigenwert ist also

$$\alpha\ell = \frac{1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = EI\alpha^2 = \frac{1}{4}\frac{EI\pi^2}{\ell^2} \approx 2{,}47 \frac{EI}{\ell^2}\,. \tag{16}$$

Die Eigenform kann hier leicht analytisch ermittelt werden, indem man die Lösung in das Gleichungssystem einsetzt:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\pi/\ell\right)^3 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es folgt, dass $A = -D$, $B = 0$ und $C = 0$ sind. Dies setzt man in die Lösung der Differentialgleichung, Gl. (2), ein und erhält:

$$w(x) = A\left(\cos(\alpha x) - 1\right)\,. \tag{17}$$

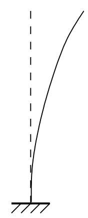

Abb. 3: Graphische Darstellung der Eigenform des 1. EULER-Falls.

2. Aufgabe

a) Die (homogene) Knickdifferentialgleichung lautet für einen Bereich i:

$$\boxed{w_i^{IV}(x) + \alpha_i^2 w_i''(x) = 0 \quad \text{mit } \alpha_i^2 = \frac{F_i}{(EI)_i}}\,. \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung für diese Differentialgleichung und deren Ableitungen lauten:

$$w_i(x) = A_i \cos(\alpha_i x) + B_i \sin(\alpha_i x) + C_i \alpha_i x + D_i \tag{2}$$
$$w_i'(x) = -A_i \alpha_i \sin(\alpha_i x) + B_i \alpha_i \cos(\alpha_i x) + C_i \alpha_i \tag{3}$$
$$-\frac{1}{(EI)_i} M(x) = w_i''(x) = -A_i \alpha_i^2 \cos(\alpha_i x) - B_i \alpha_i^2 \sin(\alpha_i x) \tag{4}$$
$$-\frac{1}{(EI)_i} Q(x) = w_i'''(x) = A_i \alpha_i^3 \sin(\alpha_i x) - B_i \alpha_i^3 \cos(\alpha_i x)\,. \tag{5}$$

Zur Lösung des Problems müssen für jeden Bereich vier Rand- bzw. Übergangsbedingungen gefunden werden. An der Stelle $x = -\ell$ gilt:

$$w_1(-\ell) = 0\,, \qquad\qquad w_1'(-\ell) = 0\,. \tag{6}$$

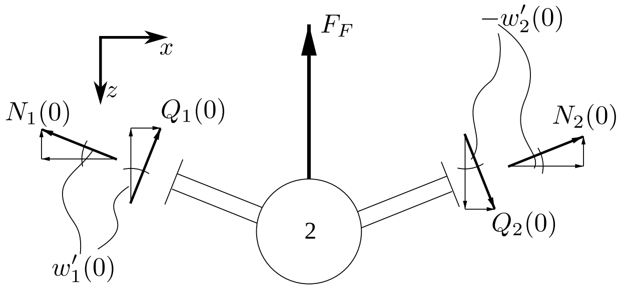

Abb. 4: Freischnitt des Übergangs.

In der Herleitung der Differentialgleichung werden Terme höherer Ordnung vernachlässigt. Daher folgt aus den linearisierten Gleichgewichtsbedingungen, dass die Normalkraft gleich der äußeren Belastung ist. Das heißt $N_1(0) = N_2(0) = -F$. Die Randbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen für den Freischnitt am Übergang an der Stelle $x = 0$ lauten:

$$w_1(0) = w_2(0)\,, \qquad M_1(0) = 0\,, \qquad M_2(0) = 0\,, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\sum F_z = Q_1(0)\cdot\cos(w_1'(0)) + F_F - Q_2(0)\cdot\cos(-w_2'(0)) &+ \\ + N_1(0)\sin(w_1'(0)) + N_2(0)\sin(-w_2'(0)) & \\ \approx Q_1(0) - Q_2(0) + c_F w(0) - F w_1'(0) + F w_2'(0) &= 0\,.\end{aligned} \tag{8}$$

An der Stelle $x = \ell$ gilt:

$$w_2(\ell) = 0\,, \qquad M_2(\ell) = 0\,. \tag{9}$$

b) Einsetzen der Randbedingungen in die Lösung Gl. (2)-(5) (mit der Vereinfachung $\alpha^2 = \frac{F}{EI}$, weil

F, EI in beiden Bereichen gleich groß sind):

$$(6)_1: \quad A_1\cos(-\alpha\ell) + B_1\sin(-\alpha\ell) - C_1\alpha\ell + D_1 = 0\,, \tag{10}$$

$$(6)_2: \quad -A_1\alpha\sin(-\alpha\ell) + B_1\alpha\cos(-\alpha\ell) + C_1\alpha = 0\,, \tag{11}$$

$$(7)_1: \quad A_1 + D_1 = A_2 + D_2\,, \tag{12}$$

$$(7)_2: \quad A_1 = 0\,, \tag{13}$$

$$(7)_3: \quad A_2 = 0\,, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(8)\colon EI(B_1\alpha^3) - EIB_2\alpha^3 + c_F(A_1+D_1) - F(B_1\alpha + C_1\alpha) + F(B_2\alpha + C_2\alpha) = 0\\ \Leftrightarrow B_1\alpha^3 - B_2\alpha^3 + \frac{c_F}{EI}(A_1+D_1) + \alpha^3(-B_1 - C_1 + B_2 + C_2) = 0\\ \Leftrightarrow \frac{c_F}{EI}(A_1+D_1) + \alpha^3(-C_1 + C_2) = 0\,,\end{aligned} \tag{15}$$

$$(9)_1: \quad A_2\cos(\alpha\ell) + B_2\sin(\alpha\ell) + C_2\alpha\ell + D_2 = 0\,, \tag{16}$$

$$(9)_2: \quad A_2\cos(\alpha\ell) + B_2\sin(\alpha\ell) = 0\,. \tag{17}$$

Mit $\cos(x) = \cos(-x)$ und $\sin(x) = -\sin(-x)$ folgt das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c & -s & -\alpha\ell & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ s & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{c_F}{EI} & 0 & -\alpha^3 & \frac{c_F}{EI} & 0 & 0 & \alpha^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & \alpha\ell & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \begin{bmatrix} A_1\\ B_1\\ C_1\\ D_1\\ A_2\\ B_2\\ C_2\\ D_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \tag{18}$$

wobei hier die Abkürzungen c für $\cos(\alpha\ell)$ und s für $\sin(\alpha\ell)$ stehen. Die charakteristische Gleichung lautet zusammengefasst:

$$\det(\underline{\underline{M}}) = 0\,. \tag{19}$$

c) Es wird für die untere Schranke angenommen, dass die Feder unendlich weich ist. Für obere Schranke wird die Feder als unendlich steif abgenommen, was einem Lager entspricht. Die Einteilung in die Ersatzsysteme ist Abb. 5 dargestellt.

Für den linken Bereich des Stabes ergibt sich der 1. oder 3. EULER-Fall als Schranke. Für den rechten Bereich ergeben sich die Schranken für die Knicklast als die des 0. oder 2. EULER-Falls. Der Erstere ist allerdings statisch nicht bestimmt und hat deshalb eine verschwindende Knicklast. Damit liegt die Knicklast im Bereich:

$$0 \leq F_k \leq \frac{EI\pi^2}{\ell^2}\,.$$

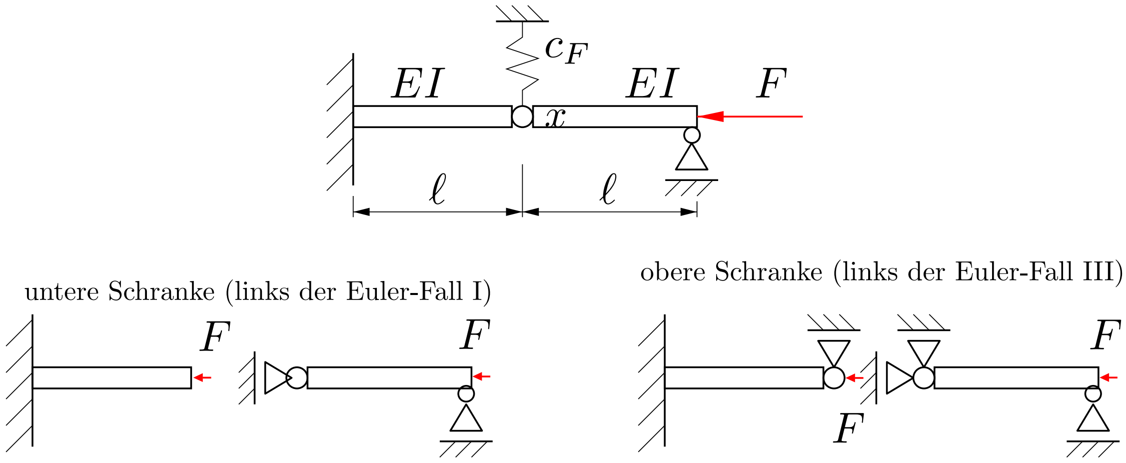

Abb. 5: Bereichweise Abschätzung der Knicklast mithilfe der EULER-Fälle.

Hausaufgaben

3. Aufgabe

Für die (homogene) Knickdifferentialgleichung

$$w^{IV}(x) + \alpha^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + C\alpha x + D\,. \tag{1}$$

Die Randbedingungen am ausgelenkten System ergeben sich aus den Lagerbedingungen und dem Freischnitt in Abb. 6:

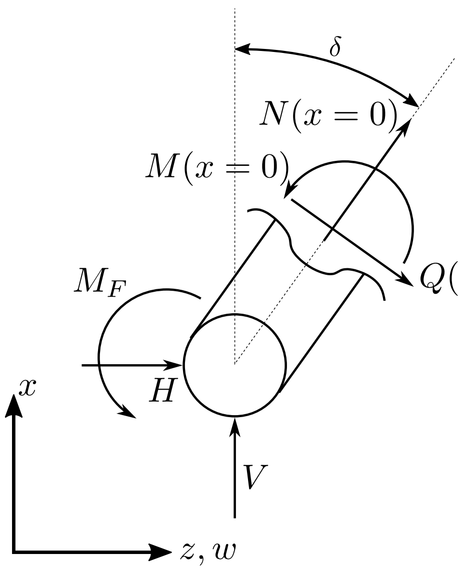

Abb. 6: Freischnitt bei $x = 0$ mit dem Moment der Drehfeder.

$$w(x=0)=0\,, \qquad M(x=0)+M_F=0\,, \tag{2}$$
$$w(x=\ell)=0\,, \qquad M(x=\ell)=0 \tag{3}$$

Dabei gilt für das Moment der Drehfeder: $M_F = c_M\delta = c_M w'(0)$. Im Folgenden werden die Randbedingungen mithilfe der allg. Lösung ausgewertet, um die Konstanten A, B, C und D zu bestimmen. Die beiden Bedingungen in Gl. (2) ergeben sich unter Verwendung der Ableitungen w' und w'' zu:

$$A+D=0\,, \tag{4}$$
$$A\alpha^2+\frac{c_M}{EI}(B\alpha+C\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{EI\alpha}{c_M}A+B+C=0\,. \tag{5}$$

Die beiden Bedingungen in Gl. (3) ergeben sich zu:

$$A\cos(\alpha\ell)+B\sin(\alpha\ell)+C\alpha\ell+D=0 \tag{6}$$
$$A\cos(\alpha\ell)+B\sin(\alpha\ell)=0 \tag{7}$$

Die Matrizenschreibweise der Gl. (4) bis (7) ist gegeben durch:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{EI\alpha}{c_M} & 1 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha\ell) & \sin(\alpha\ell) & \alpha\ell & 1 \\ \cos(\alpha\ell) & \sin(\alpha\ell) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Nicht triviale Lösungen existieren genau dann, wenn $\det(\underline{\underline{A}}) \overset{!}{=} 0$ ist. Die charakteristische Gleichung kann durch LAPLACE-Entwicklung wie folgt bestimmt werden:

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha\ell) & \alpha\ell & 1 \\ \sin(\alpha\ell) & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{EI\alpha}{c_M} & 1 & 1 \\ \cos(\alpha\ell) & \sin(\alpha\ell) & \alpha\ell \\ \cos(\alpha\ell) & \sin(\alpha\ell) & 0 \end{vmatrix} = \sin(\alpha\ell) - \Bigg(-\frac{EI\alpha}{c_M}\alpha\ell\sin(\alpha\ell) + $$
$$+\alpha\ell\cos(\alpha\ell)\Bigg) = \sin(\alpha\ell)+\frac{EI\alpha^2}{c_M}\ell\sin(\alpha\ell)-\alpha\ell\cos(\alpha\ell) \overset{!}{=} 0\,. \tag{9}$$

a) Für den **Sonderfall a**: $c_M \to 0$, was einem Gelenk bei $x=0$ entspricht, ergibt sich die charakteristische Gleichung (9) zu:

$$\sin(\alpha\ell)=0\,. \tag{10}$$

Die Eigenwerte sind gegeben durch $(\alpha\ell)_k = k\pi$ mit $k>0$. Der kleinste strikt positive Eigenwert, d. h. der kritische Eigenwert, ist $\alpha\ell=\pi$. Für diesem Sonderfall lässt sich die Eigenform durch Einsetzen von $\alpha\ell=\pi$ und $c_M=0$ in das Gleichungssystem in Gl. (8) bestimmen. Eine Lösung des linearen Systems ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ EI\frac{\pi}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \pi & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=0\,, \quad B=w_0\,, \quad C=0\,, \quad D=0\,. \tag{11}$$

Damit ist die spezifische Lösung der Differentialgleichung bis auf die unbekannte Amplitude bestimmt. Diese lautet:

$$w(x) = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) . \tag{12}$$

Dies entspricht dem 2. EULER-Fall mit einer kritischen Knicklast von:

$$F_{\text{krit}} = \alpha^2 EI = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2} \approx 9{,}87 \frac{EI}{l^2} . \tag{13}$$

b) Für den **Sonderfall b**: $c_M \to \infty$, was einer festen Einspannung bei $x = 0$ entspricht bzw. dem 3. EULER-Fall entspricht, ergibt sich die charakteristische Gleichung (9) zu:

$$\sin(\alpha\ell) - \alpha\ell\cos(\alpha\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha\ell) = \alpha\ell . \tag{14}$$

Diese Gleichung kann lediglich numerisch oder graphisch gelöst werden. Das Ergebnis der numerischen Lösung lautet:

$$\alpha\ell \approx 4{,}4934 \qquad \Rightarrow \qquad F_{\text{krit}} = \alpha^2 EI \approx 20{,}19 \frac{EI}{\ell^2} . \tag{15}$$

4. Aufgabe

a) Für einen konstanten Querschnitt und homogenes Material kann die EULERsche Knickdifferentialgleichung wie folgt vereinfacht werden:

$$(EIw''(x))'' + Fw''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad w^{IV}(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI} .$$

b) Die resultierende Normalkraft ergibt sich mit der HOOKEschen mit thermischer Erweiterung zu:

$$\sigma = -E\alpha_{\text{T}}\Delta T \quad \Rightarrow \quad N = -EA_s\alpha_T\Delta T . \tag{1}$$

Für die Knickdifferentialgleichung folgt $F = -N = EA_s\alpha_T\Delta T$.

c) Die allgemeine Lösung der Knickdifferentialgleichung und deren Ableitung lauten:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D , \tag{2}$$
$$w'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda , \tag{3}$$
$$w''(x) = -A\lambda^2\cos\lambda x - B\lambda^2\sin\lambda x = -\frac{1}{EI}M(x) , \tag{4}$$
$$w'''(x) = A\lambda^3\sin\lambda x - B\lambda^3\cos\lambda x = -\frac{1}{EI}Q(x) . \tag{5}$$

Die Randbedingungen sind gegeben durch:

$$w(0) = 0 , \qquad w'(0) = 0 , \qquad w'(\ell) = 0 , \qquad Q(\ell) = -EIw'''(\ell) = 0 . \tag{6}$$

Durch Einsetzen der allg. Lösung in die obigen Randbedingungen ergeben sich die Bedingungen zur Bestimmung der Konstanten A, B, C und D:

$$A + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -A\,, \qquad B\lambda + C\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{B}{\lambda}\,, \tag{7}$$

$$-A\lambda\sin(\lambda\ell) + B\lambda\cos(\lambda\ell) + C\lambda = 0\,, \qquad A\lambda^3\sin(\lambda\ell) - B\lambda^3\cos(\lambda\ell) = 0\,. \tag{8}$$

Durch Substitution der Lösung für C in die beiden letzteren Gleichung lässt sich folgendes lineare Gleichungssystem für A und B finden:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\lambda\ell) & \cos(\lambda\ell) - 1 \\ \sin(\lambda\ell) & -\cos(\lambda\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,. \tag{9}$$

Das System hat genau dann nicht triviale Lösungen, wenn gilt:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\sin(\lambda\ell) & \cos(\lambda\ell) - 1 \\ \sin(\lambda\ell) & -\cos(\lambda\ell) \end{bmatrix}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftarrow \quad \sin(\lambda\ell) = 0\,. \tag{10}$$

Die Lösung dieser charakteristischen Gleichung lautet somit $\lambda\ell = n\pi$ mit $n > 0$. Die kritische Last ergibt sich durch Verwendung des kleinstmöglichen Eigenwerts ($n = 1$). Diese lautet:

$$F_{\text{krit}} = EI\lambda^2 = \pi^2\frac{EI}{\ell^2}\,. \tag{11}$$

d) Mit dem Ergebnis in Teilaufgabe b) ergibt sich die zugehörige kritische Temperaturerhöhung bzw. kritische Temperatur T_2 zu:

$$\Delta T_{\text{krit}} = \frac{F_{\text{krit}}}{EA_s\alpha_{\text{T}}}\,, \qquad T_2 = T_1 + \Delta T_{\text{krit}} = T_1 + \frac{I\pi^2}{A_s\ell^2\alpha_{\text{T}}}\,.$$

Das Ergebnis ist abhängig vom Elastizitätsmodul des Materials.