Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

a) Gesucht ist die Geschwindigkeit an der Stelle $x = \ell$, d. h. $v(x = \ell) =: v_\ell$. Gegeben ist die Beschleunigung als Funktion des Weges. Aus der Skizze liest man ab, dass a folgender Gleichung genügt:

$$a(x) = -\frac{a_0}{2\ell}x + a_0 = \frac{a_0}{2}\left(2 - \frac{x}{\ell}\right) .$$

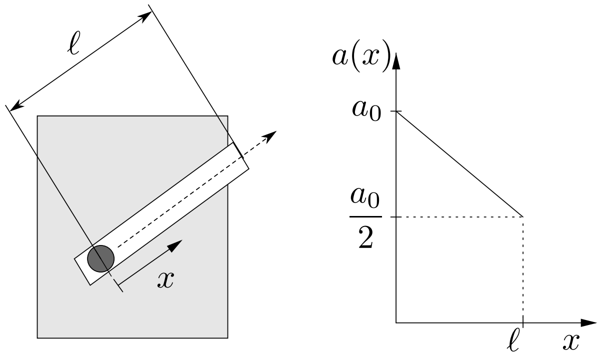

Abb. 1: Graphische Darstellung der Beschleunigungsfunktion $a(x)$.

Trennung der Variablen liefert:

$$a(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v(x(t))\right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \quad \Rightarrow \quad v\,\mathrm{d}v = a(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{1}$$

Einsetzen von $a(x) = \frac{a_0}{2}\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)$ und unbestimmte Integration ergibt:

$$\int v\,\mathrm{d}v + c_1 = \int a(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 + c_1 = \frac{a_0\ell}{4}\frac{x}{\ell}\left(4 - \frac{x}{\ell}\right) + c_2\,. \tag{2}$$

Durch die Randbedingungen können die Konstanten c_1 und c_2 bestimmt werden. Durch bestimmte Integration erhalten wir hingegen sofort:

$$\int\limits_{\tilde v=0}^{v} \tilde v\,\mathrm{d}\tilde v = \int\limits_{\tilde x=0}^{x} a(\tilde x)\,\mathrm{d}\tilde x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\tilde v^2\right]_{\tilde v=0}^{v} = \left[\frac{a_0\ell}{4}\frac{\tilde x}{\ell}\left(4 - \frac{\tilde x}{\ell}\right)\right]_{\tilde x=0}^{x} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = \underline{\underline{\sqrt{\frac{a_0\ell}{2}\frac{x}{\ell}\left(4 - \frac{x}{\ell}\right)}}}\ . \tag{4}$$

b) Für die Geschwindigkeit am Austritt, also bei $x = \ell$, gilt somit:

$$v(x = \ell) = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3}{2}a_0\ell}}}\ . \tag{5}$$

c) Nun wollen wir die Strecke $x(t)$ berechnen. Dazu fangen wir bei der Definition der Geschwindigkeit an und trennen wieder die Variablen:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v(x)} \tag{6}$$

Bestimmte Integration liefert:

$$\int\limits_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \mathrm{d}\tilde{t} = \int\limits_{\tilde{x}=0}^{\tilde{x}=x} \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}a_0\frac{\tilde{x}^2}{\ell} + 2a_0\tilde{x}}}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,. \tag{7}$$

In der Literatur[1] findet man folgendes Integrals:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-4ac+b^2}}\right) + C\,,$$

wobei diese Lösung nur gilt, falls $a < 0$ und $4ac - b^2 < 0$ ist. Durch die Substitution $a = -a_0/(2l) < 0$, $b = 0$ und $c = 2a_0$ kann das obige Integrale also gelöst werden. Die Zeit t ergibt sich zunächst in Abhängigkeit der Position x zu:

$$\left[\,\tilde{t}\,\right]_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} = \left[-\frac{1}{\sqrt{\frac{a_0}{2\ell}}}\arcsin\left(\frac{-\frac{a_0}{\ell}\tilde{x} + 2a_0}{2a_0}\right)\right]_{\tilde{x}=0}^{\tilde{x}=x}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{\sqrt{\frac{a_0}{2\ell}}}\left(\arcsin\left(\frac{-\frac{a_0}{\ell}x + 2a_0}{2a_0}\right) - \underbrace{\arcsin(1)}_{=\frac{\pi}{2}}\right)\,. \tag{8}$$

Dieses Resultat wird nun nach der Position x umgeformt und wir erhalten die Position in Abhängigkeit von der Zeit t:

$$-\sqrt{\frac{a_0}{2\ell}}t + \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{-\frac{a_0}{\ell}x + 2a_0}{2a_0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(-\sqrt{\frac{a_0}{2\ell}}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{a_0}{\ell}x + 2a_0}{2a_0}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 2\ell\left(1 - \sin\left(-\sqrt{\frac{a_0}{2\ell}}t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\,. \tag{9}$$

Das Ergebnis kann durch folgende Winkelfunktionsbeziehungen vereinfacht werden:

$$\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x\right)\,, \qquad \cos\left(-x\right) = \cos\left(-x\right)\,.$$

Damit folgt schließlich:

$$x(t) = 2\ell\left(1 - \cos\left(\sqrt{\tfrac{a_0}{2\ell}}\,t\right)\right)\,. \tag{10}$$

Mit diesem Ergebnis können wir nun die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t auf zwei verschiedenen Wegen berechnen. Die erste Möglichkeit besteht darin, $x(t)$ in Gl. (4) einfach

[1] Bronstein, Semenjajew, Musiol, Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, Aufl. 5, s. 1064, Tab. 21.5.2.8 Nr. 241

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

einzusetzen:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \sqrt{-2a_0\ell\left(1-\cos\left(\sqrt{\tfrac{a_0}{2\ell}}\,t\right)\right)^2 + 4a_0\ell\left(1-\cos\left(\sqrt{\tfrac{a_0}{2\ell}}\,t\right)\right)} \\
&= \sqrt{2a_0\ell - 2a_0\ell\cos^2\left(\sqrt{\tfrac{a_0}{2\ell}}\,t\right)} = \sqrt{2a_0\ell\sin^2\left(\sqrt{\tfrac{a_0}{2\ell}}\,t\right)} = \underline{\underline{\sqrt{2a_0\ell}\,\sin\left(\sqrt{\tfrac{a_0}{2\ell}}\,t\right)}}\,. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Das gleiche Ergebnis erhält man natürlich, wenn man $x(t)$ nach t differenziert wird.

2. Aufgabe

a) Für eine allgemeine Lage der Boje sind der Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor aufzustellen. In Polarkoordinaten ist der Ortsvektor im Allgemeinen gegeben durch:

$$\underline{x}(t) = r(t)\underline{e}_r(t)\,. \qquad (1)$$

In dieser Aufgabe ist der Radius r konstant, $r(t) = r = \text{const.}$, da das Seil der Boje stets straff gespannt sein soll. Trotzdem leiten wir den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor erst einmal allgemein für einen zeitlich veränderlichen Radius r her. Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich durch die Anwendung der Produktregel:

$$\underline{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}(t)\underline{e}_r(t) + r(t)\dot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi(t)\,. \qquad (2)$$

Für den Beschleunigungsvektor gilt:

$$
\begin{aligned}
\underline{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\underline{v}(t)}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}(t)\underline{e}_r(t) + \dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi(t) + \dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi(t) - r(t)\dot{\varphi}^2(t)\underline{e}_r(t) \\
&= (\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}^2(t))\underline{e}_r(t) + (r(t)\ddot{\varphi}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t))\underline{e}_\varphi(t)\,. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Aufgrund des konstanten Radius gilt $\dot{r} = 0$ und $\ddot{r} = 0$. Es folgt also für den Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvektor:

$$\underline{v} = r\dot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi(t)\,, \qquad \underline{a} = -r\dot{\varphi}^2(t)\underline{e}_r + r\ddot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi(t)\,. \qquad (4)$$

Kinematik: Die Bojengeschwindigkeit in tangentialer Richtung ($\underline{e}_\varphi$) ist gleich dem Anteil der Strömungsgeschwindigkeit c in dieser Richtung. Somit ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor für

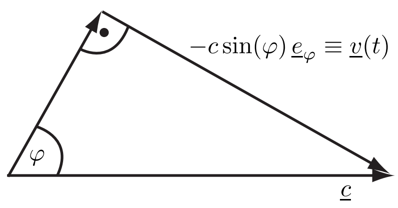

Abb. 2: Kinematische Beziehung

alle t mit Hilfe von Gl. $(4)_1$ zu:

$$\underline{v}(t) \equiv -c\sin(\varphi)\underline{e}_\varphi = \underline{\underline{r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi}}\,. \qquad (5)$$

Demzufolge ergibt sich der Zusammenhang zwischen $\dot{\varphi}$ und φ zu:

$$\dot{\varphi} = -\frac{c}{r}\sin(\varphi)\,, \qquad \dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^2}\sin^2(\varphi)\,, \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{c}{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi)\,. \tag{6}$$

Die letzten beiden Beziehungen folgen durch Quadrieren bzw. Differenzieren der ersten Beziehung. Einsetzen des Ausdrucks für $\dot{\varphi}$ in die dritte obige Gleichung liefert:

$$\ddot{\varphi} = \left(\frac{c}{r}\right)^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,. \tag{7}$$

Damit erhält man für den Beschleunigungsvektor nun:

$$\underline{a}(t) = -\frac{c^2}{r}\sin^2(\varphi)\,\underline{e}_r + \frac{c^2}{r}\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,\underline{e}_\varphi = \underline{\underline{\frac{c^2}{r}\sin(\varphi)\Big(-\sin(\varphi)\underline{e}_r + \cos(\varphi)\underline{e}_\varphi\Big)}}\,, \tag{8}$$

wobei die Zeitabhängigkeit von φ nicht mehr explizit angegeben worden ist.

b) Gesucht ist nun die Zeit t_E, die die Boje zur Überquerung des Flusses, also für die Abschreitung des Bogens von φ_1 bis φ_2 benötigt. Die Zeitabhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ist aus Aufgabenteil (a) bekannt und durch Trennung der Variablen kann die Differentialgleichung integriert werden:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi} = -\frac{c}{r}\sin(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{c}{r}\,\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Beide Seiten der letzten Gleichung können nun in den bestimmten Grenzen integriert werden:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t_\mathrm{E}} -\frac{c}{r}\mathrm{d}\tilde{t}\,. \tag{10}$$

Für das linke Integral findet man in der Literatur[2] im Allgemeinen:

$$\int \frac{1}{\sin(ax)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left(\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right) + c_1\,.$$

Damit ergibt sich für Gl. (10):

$$\left[\ln\left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \left[-\frac{c}{r}\tilde{t}\right]_0^{t_\mathrm{E}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\tan\left(\tfrac{\varphi_2}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\tfrac{\varphi_1}{2}\right)\right) = -\frac{c}{r}t_\mathrm{E}$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right) = -\frac{c}{r}t_\mathrm{E}\,. \tag{11}$$

Die gesucht Zeit t_E ergibt sich durch Umstellen der obigen Gleichung zu:

$$t_\mathrm{E} = \frac{r}{c}\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}\right)\,. \tag{12}$$

Mit den Werten für beiden Winkel $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 = \arcsin(b/r) = \arcsin(1/2) = \pi/6$ und den gegebenen Werten für r und c gemäß der Aufgabenstellung lässt sich die Zeit t_E zum Überqueren

[2] Bronstein, Semenjajew, Musiol, Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, Aufl. 5, s. 1067, Tab. 21.5.3.1 Nr. 286

des Flusses bestimmen als:

$$\underline{\underline{t_{\mathrm{E}} = \frac{r}{c} \ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)} \right)}} \approx 59\,\mathrm{s}\,. \tag{13}$$

Hausaufgaben

3. Aufgabe

a) Die Zeitzählung soll in dem Moment beginnen ($t = 0$), wenn der Fahrer des Wagens B erkennt, dass er nicht überholen kann. Zur Lösung der Aufgabe wird ein Koordinatensystem verwendet, das seinen Ursprung an der vorderen Stoßstange von Wagen B zum Zeitpunkt $t = 0$ hat. Die Bewegung geschieht entlang der x-Achse. Die Position der vorderen Stoßstange des Wagens B sei mit s_{B} bezeichnet, die hintere Stoßstange des Wagens A mit s_{A}.

Für $t \geq 0$ bewegt sich Wagen A mit konstanter Geschwindigkeit v_A fort. Für die Position erhält man dann durch Integration:

$$s_{\mathrm{A}}(t) = \int\limits_0^t v_{\mathrm{A}}\, \mathrm{d}\bar{t} + s_{\mathrm{A}}(0) = vt + \ell\,, \quad t \geq 0\,. \tag{1}$$

Wagen B bremst für $t \geq T$ mit der Beschleunigung a^* ab. Da die Beschleunigung nicht durch eine elementare Funktion geschlossen dargestellt werden kann, ist es sinnvoll, die Bereiche $0 \leq t < T$ und $t \geq T$ zu unterscheiden. Man erhält für die Geschwindigkeit des Wagens B im ersten Bereich $v_{\mathrm{B}} = 2v$ und im zweiten Bereich:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{B}}(t) &= \int\limits_0^t a_B\, \mathrm{d}\bar{t} + v_B(0) = \int\limits_0^T \underbrace{a_B}_{=0}\, \mathrm{d}\bar{t} + \int\limits_T^t a_B\, \mathrm{d}\bar{t} + v_B(0) \\ &= a^*(t - T) + 2v\,, \quad t \geq T \\ \Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}(t) &= \begin{cases} 2v\,, & 0 \leq t < T\,, \\ a^*(t-T) + 2v\,, & t \geq T\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Der Zusammenstoß muss, sofern er überhaupt stattfindet, für $t > T$ geschehen, da der Wagen B zum Zeitpunkt $t = T$ gerade erst die Position erreicht hat, die Wagen A zum Zeitpunkt $t = 0$ hatte. Daher ist auch nur die Position für den zweiten Bereich von Interesse. Man erhält durch eine weitere Integration:

$$s_{\mathrm{B}}(T) = \int_0^T v_B \mathrm{d}\bar{t} + s_B(0) = 2vT = \ell \tag{3}$$

$$s_{\mathrm{B}}(t) = \int_0^T v_{\mathrm{B}}\, \mathrm{d}\bar{t} + \int_T^t v_{\mathrm{B}}\, \mathrm{d}\bar{t} + s_B(0) = 2vT + \frac{1}{2} a^* (t-T)^2 + 2v(t-T)\,, \quad t \geq T\,. \tag{4}$$

Setzt man nun $T = \frac{\ell}{2v}$ ein, so erhält man für den Wagen B im zweiten Bereich schließlich:

$$v_{\mathrm{B}} = a^* \left(t - \frac{\ell}{2v} \right) + 2v\,, \qquad s_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2} a^* \left(t - \frac{\ell}{2v} \right)^2 + 2vt\,. \tag{5}$$

Ein Zusammenstoß findet (im Grenzfall) gerade noch statt, wenn die Bedingungen

$$s_\mathrm{A} = s_\mathrm{B}\,, \qquad \dot{s}_\mathrm{A} = \dot{s}_\mathrm{B}\,, \tag{6}$$

für $t^* > T$ erfüllt sind. Die zweite Bedingung führt auf

$$t^* = -\frac{v}{a^*} + \frac{\ell}{2v}\,. \tag{7}$$

Mit der ersten Bedingung ergibt sich die gesuchte Beschleunigung zu:

$$a^*_\mathrm{B} = -\frac{v^2}{\ell} < 0\,. \tag{8}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich eine notwendige Bremsverzögerung von $5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, welche bei guten Straßenverhältnissen möglich ist.

b) Der Zusammenstoß erfolgt gemäß Gl. (7) zur Zeit

$$t^* = 3T = \frac{3\ell}{2v} \tag{9}$$

an der Stelle

$$s_\mathrm{A}\,(t^*) = s_B\,(t^*) = \frac{5}{2}\ell\,. \tag{10}$$

4. Aufgabe

a) **Bestimmung des Ortsvektors.** Ganz allgemein gilt: Der Ortsvektor eines Punktes P in

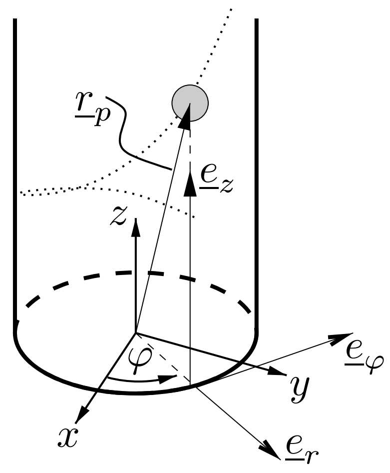

Abb. 3: Kinematik

Zylinderkoordinaten lautet:

$$\underline{r}_p(t) = r(t)\underline{e}_r(t) + z(t)\underline{e}_z(t)\ . \tag{1}$$

In dieser Aufgabe ist der Radius konstant. Das heißt $r(t) = R$. Die Höhe $z(t)$ erhalten wir aus $z(\varphi) = \ell_0 e^{k\varphi}$ mit $\varphi(t) = \omega t$ (siehe Aufgabenstellung):

$$z(t) = \ell_0 e^{k\omega t}\ . \tag{2}$$

Wir setzen $z(t)$ aus Gleichung (2) und $r(t)$ aus Gleichung (**??**) in die Ausgangsgleichung (1) zur Bestimmung des Ortsvektors des Punktes P in Zylinderkoordinaten ein. Dann erhalten wir als Ortsvektor des Punktes P:

$$\underline{r}_p(t) = R\underline{e}_r(t) + \ell_0 e^{k\omega t}\underline{e}_z \ . \tag{3}$$

b) **Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors.** Der Geschwindigkeitsvektor des Punktes ist gleich der ersten zeitlichen Ableitung des Ortsvektors :

$$\begin{aligned}\underline{v}_p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{r}_p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\underline{e}_r\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ell_0 e^{k\omega t}\underline{e}_z\right] &= R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{e}_r + \ell_0\underline{e}_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{k\omega t}\right] \\ &= R\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \ell_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z \, .\end{aligned} \tag{4}$$

Mit $\dot{\varphi}(t) = \omega$ ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor zu:

$$\underline{v}_p(t) = R\omega\underline{e}_\varphi + \ell_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z \, . \tag{5}$$

c) **Bestimmung des Beschleunigungsvektors.** Der Beschleunigungsvektor ist gleich der ersten Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit:

$$\underline{a}_p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{v}_p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\omega\underline{e}_\varphi + \ell_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\omega\underline{e}_\varphi\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ell_0 k\omega e^{k\omega t}\underline{e}_z\right] . \tag{6}$$

Mit der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\underline{e}_r = -\omega\underline{e}_r \tag{7}$$

erhalten wir den Beschleunigungsvektor:

$$\underline{a}_p(t) = -R\omega^2\underline{e}_r + \ell_0 k^2\omega^2 e^{k\omega t}\underline{e}_z \, . \tag{8}$$

Die Basisvektoren $\underline{e}_r$ und $\underline{e}_\varphi$ lassen sich auch durch die kartesischen Basisvektoren $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ darstellen:

$$\underline{e}_r = \underline{e}_x\cos\varphi + \underline{e}_y\sin\varphi \, , \qquad \underline{e}_\varphi = \underline{e}_x(-\sin\varphi) + \underline{e}_y\cos\varphi \, . \tag{9}$$

Mit $\varphi = \omega t$ ergibt sich somit:

$$\underline{e}_r = \underline{e}_x\cos(\omega t) + \underline{e}_y\sin(\omega t) \, , \qquad \underline{e}_\varphi = \underline{e}_x(-\sin\omega t) + \underline{e}_y\cos(\omega t) \, . \tag{10}$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen (3), (5) und (8) erhält man die Darstellung in kartesischen Koordinaten, hier z. B. die Beschleunigung:

$$\underline{a}(t) = \underline{e}_x(-R\omega^2\cos\omega t) + \underline{e}_y(-R\omega^2\sin\omega t) + \underline{e}_z\ell_0 k^2\omega^2 e^{k\omega t} \ . \tag{11}$$

Beide Darstellungen sind offensichtlich äquivalent!