Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

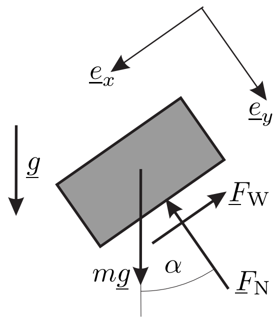

Abb. 1: Freischnitt

a) Es wird das 2. NEWTONsche Gesetz für die Kiste aufgestellt. Auf der linken Seite der Gleichung steht hierbei die Kinematik, während auf der rechten Seite die Ursache der Bewegung, die Physik, zu finden ist:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\underline{v}) = \sum \underline{F}} \tag{1}$$

Da hier $\dot{m} = 0$, lauten diese Gleichungen komponentenweise:

$$\underline{e}_x: \qquad m\ddot{x} = \sum F_x = mg\sin\alpha - F_\mathrm{W} \ , \tag{2}$$
$$\underline{e}_y: \qquad m\ddot{y} = \sum F_y = mg\cos\alpha - F_\mathrm{N} \ . \tag{3}$$

Es muss gelten $\ddot{y} = 0$, da eine Bewegung in y-Richtung durch die Ebene verhindert wird (Zwangsbedingung):

$$mg\cos\alpha - F_\mathrm{N} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha \ . \tag{4}$$

Das COULOMBsche Gesetz liefert:

$$\boxed{F_\mathrm{W} = \mu F_\mathrm{N}} = \mu mg\cos\alpha \ . \tag{5}$$

Gleichung (5) in (2):

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \ . \tag{6}$$

Zweimalige Integration von $\ddot{x}$ führt auf:

$$\dot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + C_1 \tag{7}$$
$$x = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 + C_1 t + C_2 \tag{8}$$

Die Konstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t=0) &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 0 \ , \\ x(t=0) &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = 0 \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Nun werden die Rutschzeit und die Geschwindigkeit bestimmt. Es gilt:

$$x(t = t_s) \stackrel{!}{=} s \ . \tag{10}$$

Somit folgt mit Gleichung (8):

$$t_s = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} \tag{11}$$

und mit Gleichung (7) erhält man:

$$\underline{\underline{v_s = \dot{x}(t_s) = \sqrt{2sg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}} \ . \tag{12}$$

b) Wenn die Kiste den Anschlag berührt, muss zusätzlich die Federkraft berücksichtigt werden:

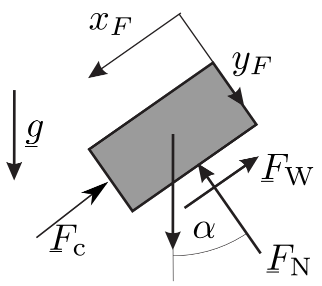

Abb. 2: Freischnitt zum Zeitpunkt des ersten Kontakts

$$m\ddot{x}_F = mg\sin\alpha - F_W - F_c \ , \tag{13}$$

$$m\ddot{y}_F = mg\cos\alpha - F_N \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad F_N = mg\cos\alpha \ , \tag{14}$$

mit

$$F_W = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha \ , \tag{15}$$

$$F_c = cx_F \ . \tag{16}$$

Gl. (15) und (16) in (13):

$$\ddot{x}_F = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{c}{m}x_F \tag{17}$$

Es ist die Strecke $x_{F_{\max}}$ zu bestimmen bis die Geschwindigkeit Null ist. Um einen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Weg zu erhalten, wird die Methode der Trennung der Variablen angewendet:

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}\mathrm{d}x = v\mathrm{d}v \ . \tag{18}$$

Hier kann integriert werden:

$$\int_0^{x_{F\max}} \ddot{x}_F \, \mathrm{d}x_F = \int_{v_s}^{0} v \mathrm{d}v$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_{F\max}} [g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{c}{m}x_F] \, \mathrm{d}x_F = \int_{v_s}^{0} v \mathrm{d}v$$

$$\Leftrightarrow g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)x_{F\max} - \frac{c}{2m}x_{F\max}^2 = -\frac{v_s^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{F\max}^2 - \frac{2m}{c}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)x_{F\max} - \frac{m}{c}v_s^2 = 0 \; . \tag{19}$$

Mit der $p-q$-Formel ergibt sich:

$$x_{F\max} = \frac{m}{c}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \pm \sqrt{\frac{m^2}{c^2}g^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)^2 + \frac{m}{c}v_s^2} \; . \tag{20}$$

Mit $v_s^2 = 2sg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (siehe Gl. (12)):

$$x_{F\max} = \frac{m}{c}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \pm \frac{m}{c}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sqrt{1 + \frac{2sc}{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} \; . \tag{21}$$

Nur die positive Lösung ist sinnvoll:

$$\underline{\underline{x_{F\max} = \frac{m}{c}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2sc}{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}\right]}} \; . \tag{22}$$

2. Aufgabe

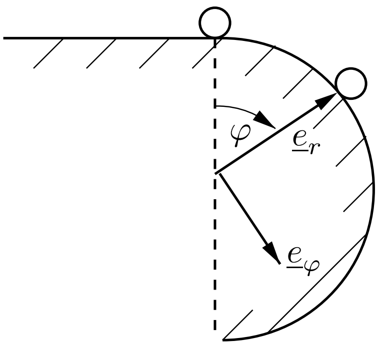

Abb. 3: Freischnitt

a) Aus dem 2. NEWTONschen Gesetz folgt erneut mit $\dot{m} = 0$:

$$\boxed{m\underline{a} = \underline{F}} \; . \tag{1}$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Freischnitt der Punktmasse:
Für das Aufstellen des 2. NEWTONschen Gesetzes bieten sich Polarkoordinaten an:

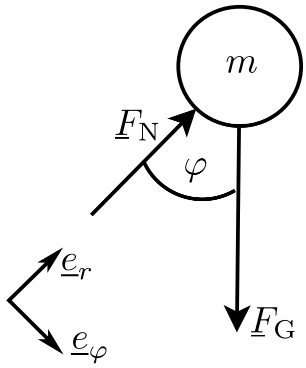

Abb. 4: Freischnitt

$$\underline{e}_r : \qquad ma_r = F_N - mg\cos\varphi \ , \tag{2}$$
$$\underline{e}_\varphi : \qquad ma_\varphi = mg\sin\varphi \ . \tag{3}$$

Kinematik:
Für die Komponenten der Beschleunigung findet man in Polarkoordinaten:

$$\underline{a} = a_r\underline{e}_r + a_\varphi\underline{e}_\varphi \tag{4}$$

mit

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \ , \tag{5}$$
$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \ . \tag{6}$$

Es gilt $r = R = \text{const.}$ und somit:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \ . \tag{7}$$

Damit ergibt sich für die Gl. (2) und (3):

$$-mR\dot{\varphi}^2 = F_N - mg\cos\varphi \ , \tag{8}$$
$$mR\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi \ . \tag{9}$$

Nun sind mehrere Methoden möglich. Da nur zwei Variablen vorkommen, können wir durch die Trennung der Variablen argumentieren. Nämlich:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}\mathrm{d}\varphi = \dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi} \tag{10}$$

kann benutzt werden, weil die Winkelbeschleunigung als eine Funktion vom Winkel gegeben ist:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{R}\sin\varphi \ . \tag{11}$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Deshalb:

$$\frac{g}{R}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \dot\varphi\mathrm{d}\dot\varphi \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\hat\varphi=0}^{\hat\varphi=\varphi}\frac{g}{R}\sin\hat\varphi\,\mathrm{d}\hat\varphi = \int_{\dot{\hat\varphi}=\dot\varphi_0}^{\dot{\hat\varphi}=\dot\varphi}\dot{\hat\varphi}\,\mathrm{d}\dot{\hat\varphi} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{g}{R}\cos\hat\varphi\right]_{\hat\varphi=0}^{\hat\varphi=\varphi} = \left[\frac{\dot{\hat\varphi}^2}{2}\right]_{\dot{\hat\varphi}=\dot\varphi_0}^{\dot{\hat\varphi}=\dot\varphi}\ , \tag{14}$$

wobei $\dot\varphi(t=0) = \dot\varphi_0 = \frac{v_0}{R}$ mit Hilfe der Kinematik für die Geschwindigkeit gefunden werden kann:

$$-\frac{g}{R}\cos\varphi + \frac{g}{R} = \frac{\dot\varphi^2}{2} - \frac{\dot\varphi_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + 2\frac{g}{R}\left[1-\cos\varphi\right]\ . \tag{15}$$

Alternativ wird die Gl. (9) mit $\dot\varphi$ erweitert und mit Hilfe der Ableitung wie folgt umgeschrieben:

$$mR\ddot\varphi\dot\varphi = mg\dot\varphi\sin\varphi \tag{16}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{mR\dot\varphi^2}{2}\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mg\cos\varphi\right]\ . \tag{17}$$

Hier kann nun m gekürzt und in bestimmten Grenzen über die Zeit integriert werden:

$$\left[R\dot{\tilde\varphi}^2\right]_{\dot\varphi_0}^{\dot\varphi} = -\left[2g\cos\tilde\varphi\right]_0^{\varphi}\ , \tag{18}$$

wobei $\dot\varphi(t=0) = \dot\varphi_0 = \frac{v_0}{R}$ mit Hilfe der Kinematik für die Geschwindigkeit gefunden werden kann:

$$R\dot\varphi^2 - R\dot\varphi_0^2 = -2g\left(\cos\varphi - \cos 0\right) \tag{19}$$

$$\Rightarrow \dot\varphi^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + 2\frac{g}{R}\left(1-\cos\varphi\right)\ . \tag{20}$$

Jetzt kann der gefundene Ausdruck für $\dot\varphi^2$ aus Gl. (20) in Gl. (8) eingesetzt und diese nach F_N umgeformt werden:

$$\begin{aligned} F_N &= mg\cos\varphi - mR\dot\varphi^2 \\ &= mg\cos\varphi - m\frac{v_0^2}{R} - 2mg\left[1-\cos\varphi\right]\ . \end{aligned} \tag{21}$$

Beim Abheben der Masse, also unter dem Winkel φ_1, muss gelten $F_N = 0$:

$$\Rightarrow 0 = 3g\cos\varphi_1 - \frac{v_0^2}{R} - 2g \tag{22}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \underline{\underline{\arccos\left[\frac{1}{3}\left(\frac{v_0^2}{gR}+2\right)\right]}}\ . \tag{23}$$

b) Hier ist nun die Geschwindigkeit v_0 zu berechnen, damit die Masse bei $\varphi_2 = 0$ abhebt. Die Bedingung $F_N = 0$ muss ebenso gelten. Entsprechend Gleichung (22) erhält man:

$$3g\underbrace{\cos\varphi_2}_{=1} - \frac{v_0^2}{R} - 2g = 0 \Rightarrow v_0^2 = (3g-2g)R = gR$$
$$\Rightarrow v_0 = \pm\sqrt{gR} \;\Rightarrow \underline{\underline{v_0 = \sqrt{gR}}} \tag{24}$$

wobei nur das positive v_0 sinnvoll ist.

Hausaufgaben

3. Aufgabe

a) Der Koordinatenursprung wird in den Ausgangspunkt des Balls gelegt.

$$\ddot{x}(t) = 0 \tag{1}$$
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = C_1 \tag{2}$$
$$\Rightarrow x(t) = C_1 t + C_2\ , \tag{3}$$
$$\ddot{y}(t) = -g \tag{4}$$
$$\Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + C_3 \tag{5}$$
$$\Rightarrow y(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 \tag{6}$$

Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0\ , \tag{7}$$
$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0\ , \tag{8}$$
$$\dot{x}(0) = v_0\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0\cos\alpha\ , \tag{9}$$
$$\dot{y}(0) = v_0\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad C_3 = v_0\sin\alpha\ . \tag{10}$$

Damit lauten die Bewegungsgesetze:

$$x(t) = v_0\cos\alpha t\ , \tag{11}$$
$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0\sin\alpha t\ . \tag{12}$$

Bedingungen, damit der Ball den Korb trifft, sind:

$$x(t_e) = d\ , \tag{13}$$
$$y(t_e) = h \tag{14}$$

Damit folgt für die Endzeit t_e:

$$t_e = \frac{d}{v_0\cos\alpha}\ . \tag{15}$$

Mit Gl. (12), (14) und (15) ergibt sich die Geschwindigkeit v_0:

$$
\begin{aligned}
-g\frac{t_e^2}{2} + v_0 \sin\alpha t_e &= h \\
\Leftrightarrow -\frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{d}{v_0\cos\alpha} &= h \\
\Rightarrow v_0 &= \sqrt{\frac{gd^2}{2\left(d\sin\alpha\cos\alpha - h\cos^2\alpha\right)}}\ . \qquad (16)
\end{aligned}
$$

b) Die Wurzel in Gleichung (16) wird imaginär bzw. unendlich, wenn gilt:

$$d\sin\alpha\cos\alpha - h\cos^2\alpha \leq 0\ . \qquad (17)$$

Sinnvollerweise ist $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und damit sind $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.
Somit ergibt sich:

$$d \leq h\cot\alpha. \qquad (18)$$