Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Kräfte sind die Ursachen für die Bewegung einer Punktmasse und die Summe aller Kräfte gibt die Änderung des Impulses an. Das Integral über das Zeitintervall $(0, t_S)$ vom Stoßanfang bis zur Stoßende lautet:

$$m\underline{v} - m\underline{v}_0 = \underline{K} = \int_0^{t_S} \underline{F}\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

Die Stoßhypothese sagt aus, dass der Kraftstoß $\underline{K}$ nur normal zu den beteiligten Körpern wirken soll – in diesem Fall also nur entlang der x-Richtung. In Bezug auf die Masse m ist der Kraftstoß in negative x-Richtung gerichtet, also $\underline{K} = -K_x\underline{e}_x$. In der Vorlesung wurde der Stoßvorgang in die Kompressions- (K^{K}) und Restitutionsphase (K^{R}) aufgeteilt, siehe dazu auch Abb. 1. Dies ist möglich, da die Integration additiv ist. Hier ergibt sich:

$$\underline{K} = -K_x\underline{e}_x = -K_x^{\mathrm{K}}\underline{e}_x - K_x^{\mathrm{R}}\underline{e}_x\ , \tag{2}$$

wobei das Verhältnis der Kraftstoßanteile die Stoßzahl definiert als:

$$e = \frac{K^{\mathrm{R}}}{K^{\mathrm{K}}}\,, \quad \text{hier gilt:} \quad e = \frac{K_x^{\mathrm{R}}}{K_x^{\mathrm{K}}}\,. \tag{3}$$

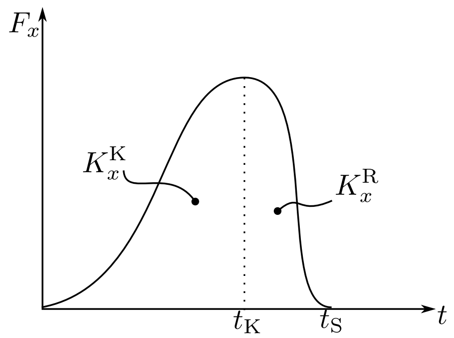


Abb. 1: Verlauf der Kontaktkraft infolge des Stoßes.

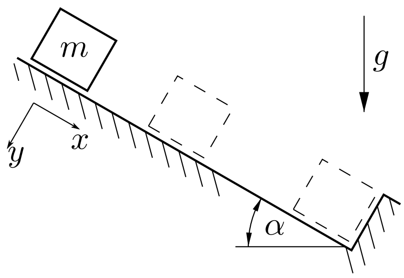


Abb. 2: Klotz auf der schiefen Ebene mit Koordinatensystem.

In dem Moment, in dem der Klotz die Wand berührt, beginnt die Zeitzählung. Das heißt in diesem Moment gilt $t = 0$. Genau zum Zeitpunkt t_{K} ist die Geschwindigkeit null. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat der Klotz die Geschwindigkeit v. In der Kompressionsphase wird er bis auf null abgebremst. Dabei wird die Kontaktkraft F_x immer größer. In der Restitutionsphase beschleunigt der Körper wieder und erreicht die Geschwindigkeit v'. Wir stellen den Impulssatz in x-Richtung jeweils für die Kompressions- und die Restitutionsphase auf:

$$0 - mv_x = \int_0^{t_\mathrm{K}} F_x \mathrm{d}t = K_x^\mathrm{K}\,, \qquad mv'_x - 0 = \int_{t_\mathrm{K}}^{t_\mathrm{S}} F_x \mathrm{d}t = K_x^\mathrm{R}\,. \tag{4}$$

Damit folgt für die Stoßzahl in Gl. (3):

$$e = \frac{K_x^\mathrm{R}}{K_x^\mathrm{K}} = -\frac{v'_x}{v_x}\,. \tag{5}$$

Die Geschwindigkeiten v_x und v'_x werden jeweils einzeln mit dem Energieerhaltungssatz berechnet:

$$E_0^\mathrm{pot} + E_0^\mathrm{kin} = E_1^\mathrm{pot} + E_1^\mathrm{kin}\,. \tag{6}$$

Die Gleichung wird zunächst auf die Situation vor dem Stoß und anschließend nach dem Stoß angewendet, nicht jedoch in Bezug auf Zeitpunkte vor und nach dem Stoß gleichzeitig, da im Stoßvorgang Energie dissipiert wird. Wir wählen das Nullniveau auf Höhe der Wand. Zunächst stellen wir den Energieerhaltungssatz auf für den Klotz zwischen der Anfangsposition und dem Punkt unmittelbar vor dem Wandaufschlag auf:

$$mg\sin(\alpha)\ell_0 + 0 = 0 + \frac{m}{2}v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\sin(\alpha)\ell_0}\,. \tag{7}$$

Da der Klotz sich nach unten und damit in positiver x-Richtung bewegt, gilt für den Geschwindigkeitsvektor vor dem Stoß $\underline{v} = v\underline{e}_x$. Analog stellen wir den Energieerhaltungssatz zwischen dem Moment, an dem der Klotz sich von der Wand löst, und dem Zeitpunkt, wo er wieder stehen bleibt, auf:

$$0 + \frac{m}{2}v'^2 = mg\sin(\alpha)\ell_1 + 0 \quad \Rightarrow \quad v' = \sqrt{2g\sin(\alpha)\ell_1}\,. \tag{8}$$

Nach dem Stoß bewegt sich m nach oben, daher für den Geschwindigkeitsvektor vor dem Stoß $\underline{v}' = -v'\underline{e}_x$. Damit folgt für die Stoßzahl:

$$e = -\frac{v'_x}{v_x} = -\frac{-\sqrt{2g\sin(\alpha)\ell_1}}{\sqrt{2g\sin(\alpha)\ell_0}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_0}} \approx 0{,}8\,. \tag{9}$$

2. Aufgabe

a) Gesucht sind zunächst die Geschwindigkeiten in den Punkten B und C, welche mit den Symbolen v_B und v_C bezeichnet werden. Da die Strecke zwischen den Punkten A und B reibungsfrei ist, gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E_A^\mathrm{kin} + E_A^\mathrm{pot} = E_B^\mathrm{kin} + E_B^\mathrm{pot}\,. \tag{1}$$

Im Punkt A ist die Masse in Ruhe. Wegen $F^\mathrm{Feder} = -\partial E^\mathrm{pot}/\partial x = -cx$ $E^\mathrm{pot} = cx^2/2$ gilt für die potentielle Energie. Deshalb folgen unter Beachtung des Nullniveau der potentielle Energie folgende Ausdrücke für einzelnen Energien:

$$E_A^\mathrm{kin} = 0\,, \qquad E_A^\mathrm{pot} = mgH + \frac{1}{2}c\Delta s^2\,, \qquad E_B^\mathrm{kin} = \frac{v_B^2\,m}{2}\,, \qquad E_B^\mathrm{pot} = 0\,. \tag{2}$$

Durch Einsetzen von Gl. (2) in Gl. (1) ergibt sich:

$$mgH + \frac{1}{2}c\Delta s^2 = v_B^2 \frac{m}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2gH + \frac{c}{m}\Delta s^2 = v_B^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_B = \sqrt{2gH + \frac{c}{m}\Delta s^2}}}\,. \tag{3}$$

Aufgrund der Reibungsfreiheit gilt zwischen den Punkten A und C wiederum der Energieerhaltungssatz:

$$E_A^{\text{kin}} + E_A^{\text{pot}} = E_C^{\text{kin}} + E_C^{\text{pot}}\,. \tag{4}$$

Die Energien E_A^{kin} und E_A^{pot} sind oben bereits bestimmt worden. Die Energien im Punkt C ergeben sich somit zu:

$$E_C^{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_C^2\,, \qquad E_C^{\text{pot}} = mga\,. \tag{5}$$

Das Einsetzen der entsprechenden Energieausdrücke in Gl. (4) ergibt:

$$\begin{aligned} mgH + \frac{1}{2}c\Delta s^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mga \quad &\Leftrightarrow \quad 2gH + \frac{c}{m}\Delta s^2 = v_C^2 + 2ga \\ \Leftrightarrow \quad 2gH - 2ga + \frac{c}{m}\Delta s^2 = v_C^2 \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{v_C = \sqrt{2g(H-a) + \frac{c}{m}\Delta s^2}}}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Somit ist die gesuchten Geschwindigkeiten bestimmt worden.

b) Nun ist der benötigte Bremsweg L gesucht. In Folge der Reibung zwischen den Punkten C und D wird Energie dissipiert. Der Arbeitssatz zwischen den Punkten A und D lautet:

$$\left(E_D^{\text{kin}} + E_D^{\text{pot}}\right) - \left(E_A^{\text{kin}} + E_A^{\text{pot}}\right) = W_{AD}^{\text{diss}}\,. \tag{7}$$

Hier ist mit W_{AD}^{diss} die Arbeit der dissipativen, also nicht konservativen, Kräfte zwischen den Punkten A und D bezeichnet. Die kinetische und die potentielle Energie im Punkt A sind bereits bestimmt worden. Im Punkt D ruht der Klotz und deshalb ergeben sich die Energien im Punkt D zu:

$$E_D^{\text{kin}} = 0\,, \qquad E_D^{\text{pot}} = mgh_D\,. \tag{8}$$

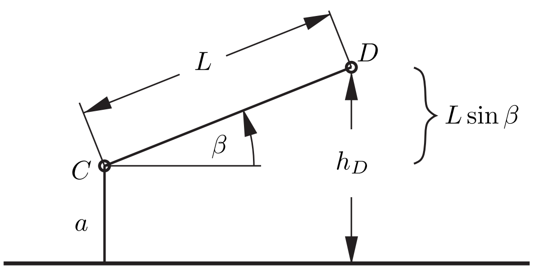


Abb. 3: Skizze zur Bestimmung der Größe h_D.

Unter Verwendung der Skizze in Abb. 3 kann die Höhe h_D bestimmt werden als:

$$h_D = a + L\sin(\beta)\,. \tag{9}$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Die geleistete Arbeit der dissipativen Kräfte zwischen den Punkten A und C verschwindet. Deshalb wird im Folgenden lediglich die Arbeit der dissipativen Kräfte zwischen den Punkten C und D betrachtet. Unter Verwendung des Freischnitts in Abb. 4 ergeben sich die Bewegungsgleichungen

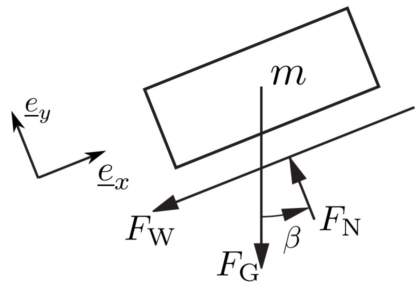


Abb. 4: Freischnitt des Klotzes an schiefen Ebene zwischen den Punkten C und D.

in $\underline{e}_x$- und $\underline{e}_y$-Richtung zu:

$$m\ddot{x} = -F_{\mathrm{W}} - mg\sin(\beta)\,, \qquad m\ddot{y} = F_{\mathrm{N}} - mg\cos(\beta)\,. \tag{10}$$

Die Widerstandskraft F_{W} kann mit Hilfe der Zwangsbedingung $\ddot{y} = 0$ und dem Coloumbschen Gesetz in Abhängigkeit von Gewichtskraft ausgedrückt werden. Aus der Zwangsbedingung folgt zunächst $F_{\mathrm{N}} = mg\cos(\beta)$. Damit ergibt sich unter Verwendung des Coloumbschen Gesetz:

$$F_{\mathrm{W}} = \mu F_{\mathrm{N}} = \mu mg\cos(\beta)\,. \tag{11}$$

Für die Arbeit ergibt sich mit $\mathrm{d}\underline{x} = -\mathrm{d}x\underline{e}_x$, $\underline{F}_W = -\mu mg\cos(\beta)\underline{e}_x$ und $\underline{F}_N = mg\cos(\beta)\underline{e}_y$:

$$W_{AD}^{\mathrm{diss}} = \int_{x_C}^{x_D} \underline{F}^{\mathrm{diss}} \cdot \mathrm{d}\underline{x} = \int_{x_C}^{x_D} (\underline{F}_W + \underline{F}_N) \cdot \mathrm{d}\underline{x} = \int_{x_C}^{x_D} \underline{F}_W \cdot \mathrm{d}\underline{x} = -\int_{x_C}^{x_D} \mu mg\cos(\beta)\,\mathrm{d}x\,. \tag{12}$$

Hier verschwindet die Normalkraft $\underline{F}_N$ in dem Integral, da diese senkrecht zum Wegelement ist. Dies bestätigt die Aussage, dass Zwangskräfte keine Arbeit leisten. Der Integrand ist konstant und die zurückgelegte Strecke $x_D - x_C$ ist gegeben durch den Bremsweg L. Somit gilt für die Arbeit der dissipativen Kräfte zwischen den Punkten A und D:

$$W_{AD}^{\mathrm{diss}} = -\mu mg\cos(\beta)L \tag{13}$$

Einsetzen der Gln. $(2)_{1,2}$, (8) und (13) in Gl. (**??**) liefert:

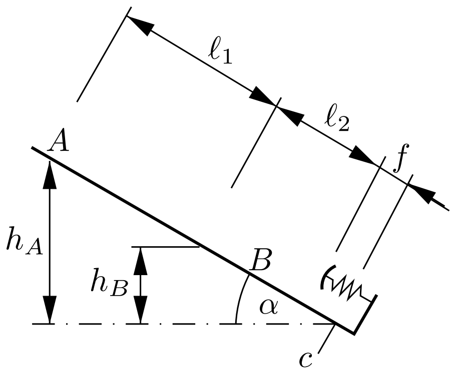
$$\begin{aligned}
&mg\,(a + L\sin(\beta)) - mgH - \frac{1}{2}c\Delta s^2 = -\mu mgL\cos(\beta)\\
&\Leftrightarrow 2a + 2L\sin(\beta) - 2H - \frac{c}{mg}\Delta s^2 = -2\mu L\cos(\beta)\\
&\Leftrightarrow 2L\,(\sin(\beta) + \mu\cos(\beta)) = 2(H-a) + \frac{c}{mg}\Delta s^2 \quad \Rightarrow \quad L = \underline{\underline{\frac{2(H-a) + \frac{c}{mg}\Delta s^2}{2\,(\sin(\beta) + \mu\cos(\beta))}}}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

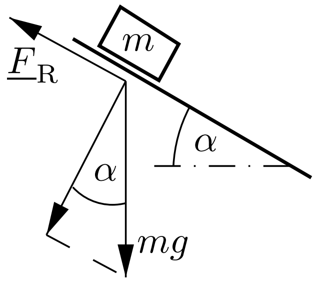
Somit ist der gesuchte Bremsweg bestimmt worden.

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Hausaufgaben

3. Aufgabe





Für die Gesamtmasse $m = m_1 + m_2$ (Wagens plus Klotz) gilt der Arbeitssatz zwischen den Punkten A und C:

$$E_{\mathrm{C}}^{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{C}}^{\mathrm{kin}} - E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{pot}} - E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{kin}} = W_{\mathrm{AC}} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{2} f^2 + 0 - mgh_{\mathrm{A}} - \frac{m}{2} v_0^2 = W_{\mathrm{AC}} \tag{2}$$

mit

$$h_{\mathrm{A}} = (\ell_1 + \ell_2 + f)\sin(\alpha) \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{AC}} &= \int_A^B \underline{F}_{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{d}\underline{s} + \int_B^C \underline{F}_{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{d}\underline{s} \\ &= \left(-\mu m_1 g\cos(\alpha)\right)\ell_1 + \left(-\mu mg\cos(\alpha)\right)(\ell_2 + f) \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Gl. (3) und (4) in (2):

$$\frac{c}{2} f^2 - mg(\ell_1 + \ell_2 + f)\sin(\alpha) - \frac{m}{2} v_0^2 = -\mu m_1 g\cos(\alpha) \cdot \ell_1 - \mu mg\cos(\alpha) \cdot (\ell_2 + f) \ . \tag{5}$$

Die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = \sqrt{v_0^2}$, wobei

$$v_0^2 = \frac{2}{m}\left[\mu g\Big(m_1\cos(\alpha)\ell_1 + m\cos(\alpha)(\ell_2 + f)\Big) + \frac{c}{2} f^2 - mg(\ell_1 + \ell_2 + f)\sin(\alpha)\right] \ . \tag{6}$$