Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

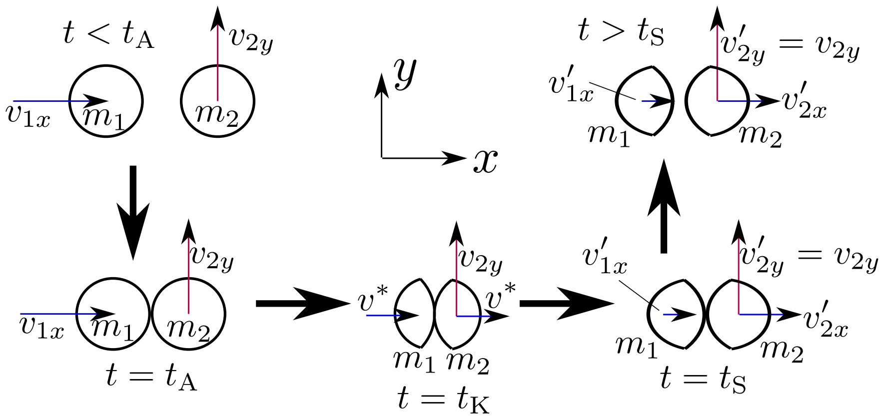

Abb. 1: Kaskade des Stoßprozesses

a) **Herleitung – Stoß zweier Massen:** (Aufgabe weiter ab Gleichung 15)
Es gilt der Impulssatz. Während des Vorganges wird ein Teil der Bewegung (des Impulses) von einem Ball zu dem anderen übertragen. Diese Änderung des Impulses über die Zeit haben wir bereits nach dem 2. Newtonschen Prinzip durch die Änderung der Kräfte über die Zeit berücksichtigt. Also wird auf die Masse 1 während des Stoßes die Kraft F_{12} von der Masse 2 ausgeübt und es folgt:

$$m_1 v'_{1x} - m_1 v_{1x} = \int_{t_A}^{t_S} F_{12} \mathrm{d}t = K_{12} \ . \tag{1}$$

Man teilt den Stoßvorgang in die Kompressionsphase und die Restitutionsphase auf. Zunächst wird die Masse 1 abgebremst auf v^* und bewegt sich am Ende der Kompressionsphase zum Zeitpunkt $t = t_K$ mit der selben Geschwindigkeit wie Masse 2. In der Restitutionsphase wird die Masse 1 auf ihre Geschwindigkeit nach dem Stoß beschleunigt auf v'_{1x}. Wir stellen also den Impulssatz in der Kompressionsphase (von $t = t_A$ bis $t = t_K$) und in der Restitutionsphase (von $t = t_K$ bis $t = t_S$) auf:

$$m_1 v^* - m_1 v_{1x} = \int_{t_A}^{t_K} F_{12} \mathrm{d}t = K_{12}^{K} \ , \tag{2}$$

$$m_1 v'_{1x} - m_1 v^* = \int_{t_K}^{t_S} F_{12} \mathrm{d}t = K_{12}^{R} \ . \tag{3}$$

Die Stoßzahl wurde definiert als

$$e = \frac{\int_{t_K}^{t_S} F_{12} \mathrm{d}t}{\int_{t_A}^{t_K} F_{12} \mathrm{d}t} = \frac{K_{12}^{R}}{K_{12^K}} \ . \tag{4}$$

Die gleiche Vorgehensweise für die Masse 2 liefert:

$$m_2 v^* - m_2 v_{2x} = \int_{t_A}^{t_K} F_{21} \mathrm{d}t = K_{21}^{\mathrm{K}} \ , \tag{5}$$

$$m_2 v'_{2x} - m_2 v^* = \int_{t_K}^{t_S} F_{21} \mathrm{d}t = K_{21}^{\mathrm{R}} \ , \tag{6}$$

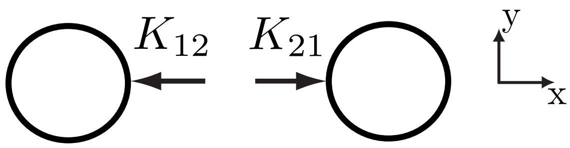

Abb. 2

wobei nach dem 3. Newtonschen Prinzip (actio=reactio)

$$F_{12} = -F_{21} \ , \quad \text{bzw. } K_{12} = -K_{21} \tag{7}$$

und deshalb

$$m_2 v^* - m_2 v_{2x} = -\int_{t_A}^{t_K} F_{12} \mathrm{d}t = -K_{12}^{\mathrm{K}} \ , \tag{8}$$

$$m_2 v'_{2x} - m_2 v^* = -\int_{t_K}^{t_S} F_{12} \mathrm{d}t = -K_{12}^{\mathrm{R}} \tag{9}$$

gelten muss.

Durch Umformulierung ist die eingeführte Unbekannte v^* aus (2):

$$v^* = v_{1x} + \frac{K_{12}^{\mathrm{K}}}{m_1} \ , \tag{10}$$

$$v^* = v'_{1x} - \frac{K_{12}^{\mathrm{R}}}{m_1} \ . \tag{11}$$

Dies wird nun in (8), (9) eingesetzt:

$$m_2 v_{1x} + \frac{m_2 K_{12}^{\mathrm{K}}}{m_1} - m_2 v_{2x} = -K_{12}^{\mathrm{K}}$$

$$\Rightarrow \quad K_{12}^{\mathrm{K}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{2x} - v_{1x}) \ , \tag{12}$$

$$m_2 v'_{2x} - m_2 v'_{1x} + m_2 \frac{K_{12}^{\mathrm{R}}}{m_1} = -K_{12}^{\mathrm{R}}$$

$$\Rightarrow \quad K_{12}^{\mathrm{R}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v'_{1x} - v'_{2x}) \ . \tag{13}$$

Gl. (4) mit (12) und (13) liefert die Stoßzahl e:

$$e = \frac{K_{12}^{\mathrm{R}}}{K_{12}^{\mathrm{K}}} = \frac{v'_{1x} - v'_{2x}}{v_{2x} - v_{1x}} = -\frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{2x} - v_{1x}} \tag{14}$$

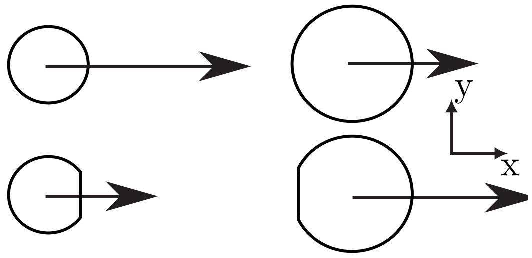

Abb. 3

und somit

$$\boxed{e = \frac{v'_{1x} - v'_{2x}}{v_{2x} - v_{1x}}} \tag{15}$$

als Relation der relativen Geschwindigkeiten in der Stoßrichtung x.

Zurück zur Aufgabe:
Senkrecht zur Stoßnormale (hier die y-Richtung) findet keine Kraftübertragung statt, d. h.:

$$m_1 v'_{1y} = 0 \ , \tag{16}$$

$$m_2 v'_{2y} = m_2 v_{2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_{2y} = v_2 \ . \tag{17}$$

Die gegebene Geschwindigkeiten vor dem Stoß

für m_1:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

für m_2:

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

und die Bedingung $e = \frac{1}{2}$ für Gl. (14):

$$e = \frac{v'_{1x} - v'_{2x}}{v_{2x} - v_{1x}} = \frac{1}{2} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad v'_{2x} = \frac{1}{2} v_1 + v'_{1x} \tag{21}$$

Siehe Abb. 2: Auf die Masse 1 wirkt der gerichtete Kraftstoß $-K^{21}$. Auf die Masse 2 wirkt der gerichtete Kraftstoß K^{12}.

$$m_1 v'_{1x} - m_1 v_{1x} = -K^{21} \ ,$$
$$m_2 v'_{2x} - m_2 v_{2x} = +K^{12} \ .$$

Da beide Kraftstöße gleich sind folgt:

$$m_1 v'_{1x} - m_1 v_{1x} = -(m_2 v'_{2x} - m_2 v_{2x}) \tag{22}$$

und mit den gegebenen Werten:

$$m_1 v'_{1x} - m_1 v_1 = -m_2\left(\frac{1}{2}v_1 + v'_{1x}\right) \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v'_{1x} = \left(\frac{m_1 - \frac{1}{2}m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1}}\ , \tag{24}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v'_{2x} = \left(\frac{1}{2} + \frac{m_1 - \frac{1}{2}m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1}}\ . \tag{25}$$

b) Ges.: Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ für $\alpha = 45°$.

$$\tan\alpha = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}} \stackrel{!}{=} \tan 45° = 1 \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{m_1 - \frac{1}{2}m_2}{m_1 + m_2}\right)} = 1\ .$$

Damit folgt:

$$m_1 - \frac{1}{2}m_2 = \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{m_1}{m_2} = 2}}\ . \tag{28}$$

2. Aufgabe

a) Ges.: $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_\mathrm{S}$

Für den Schwerpunkt gilt allgemein:

$$\boxed{\underline{x}_s = \frac{\sum_i m_i \underline{x}_i}{\sum_i m_i}}\ , \qquad \text{hier ist } i = 1, 2\ . \tag{1}$$

Die Koordinaten der Massenpunkte sind wegen der Konstruktion betragsmäßig für alle Zeiten gleich groß:

$$\underline{x}_1 = x_1(t)\underline{e}_x + 2a\underline{e}_z\ , \quad \underline{x}_2 = -x_1(t)\underline{e}_x + a\underline{e}_z\ ,$$
$$\underline{\underline{\underline{x}_\mathrm{S} = \frac{3a}{2}\underline{e}_z}} \tag{2}$$

deshalb ist der Schwerpunkt unabhängig von der Zeit, d. h. $\ddot{\underline{x}}_\mathrm{S} = \underline{0}$

b)

$$m_\mathrm{ges}\,\ddot{\underline{x}}_\mathrm{S} = \underline{F}_\mathrm{ges}\ . \tag{3}$$

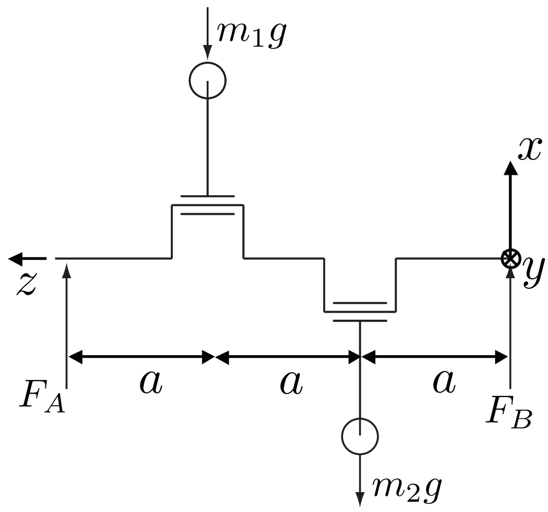

Abb. 4: Freischnitt

Aus dem Freischnitt:

$$\underline{e}_x : m_{\text{ges}}\, \ddot{x}_{\text{S}} = -m_1 g - m_2 g + F_A + F_B \tag{4}$$

mit

$$m_{\text{ges}} = m_1 + m_2, \quad m_1 = m_2 = m\ , \quad \underline{\ddot{x}}_{\text{S}} = \ddot{x}_{\text{S}}\underline{e}_x + \ddot{y}_{\text{S}}\underline{e}_y + \ddot{z}_{\text{S}}\underline{e}_z = \underline{0} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{2mg = F_A + F_B}} \tag{6}$$

c) Drallsatz

$$\boxed{\underline{\dot{L}} = \underline{M}^{(B)}} \quad , \quad \boxed{\underline{L} = \sum_i \underline{x}_i \times m_i \underline{v}_i} \tag{7}$$

wobei

$$\underline{v}_1 = \underline{\dot{x}}_1 = \dot{x}_1 \underline{e}_x \quad , \quad \underline{v}_2 = \underline{\dot{x}}_2 = -\dot{x}_1 \underline{e}_x \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \underline{L} &= m(\underline{x}_1 \times \underline{v}_1 + \underline{x}_2 \times \underline{v}_2) \\
&= m\big[(x_1(t)\underline{e}_x + 2a\underline{e}_z) \times \dot{x}_1\underline{e}_x + (-x_1(t)\underline{e}_x + a\underline{e}_z) \times (-\dot{x}\underline{e}_x)\big] \\
&= m x_1(t)\dot{x}_1 \underbrace{(\underline{e}_x \times \underline{e}_x)}_{=\underline{0}} + 2ma\dot{x}_1 \underbrace{(\underline{e}_z \times \underline{e}_x)}_{=\underline{e}_y} + m x_1(t)\dot{x}_1 \underbrace{(\underline{e}_x \times \underline{e}_x)}_{=\underline{0}} + (-ma\dot{x}_1) \underbrace{(\underline{e}_z \times \underline{e}_x)}_{=\underline{e}_y} \\
&= ma\dot{x}_1 \underline{e}_y \\
\Rightarrow \underline{\dot{L}} &= ma\ddot{x}_1 \underline{e}_y\ .
\end{aligned} \tag{9}$$

Äußeres Moment um den Punkt B (aus Freischnitt):

$$\underline{M}_{i,\text{ges}} = (3aF_A - 2amg - amg)\underline{e}_y\ . \tag{10}$$

(9) und (10) ergibt:

$$\underline{\underline{m\ddot{x}_1 \underline{e}_y = (3F_A - 3mg)\underline{e}_y}}\ . \tag{11}$$

d) Aus (11) folgt mit (6) die Lagerkraft F_B:

$$\underline{\underline{F_A = \frac{1}{3}m\ddot{x}_1 + mg}} \quad , \quad \underline{\underline{F_B = mg - \frac{1}{3}m\ddot{x}_1}}\ . \tag{12}$$

Hausaufgaben

3. Aufgabe

Beide Fahrzeuge rutschen nach dem Stoß mit der selben Geschwindigkeit v_0. Außerdem werden beide Autos als Massenpunkte aufgefasst.

a) Nun lässt sich der Impulssatz in x- und y-Richtung aufstellen. Im Moment des Aufpralls wirken in guter Näherung keine äußeren Kräfte, daher ist der Impuls vor dem Stoß gleich dem nach dem Stoß.

Impuls in x-Richtung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha = (m_1 + m_2) v_0 \cos\beta\ . \tag{1}$$

Impuls in y-Richtung:

$$m_2 v_2 \sin\alpha = (m_1 + m_2) v_0 \sin\beta\ . \tag{2}$$

Indem die zweite durch die erste Gleichung dividiert, erhält man für den gesuchten Winkel β:

$$\tan\beta = \frac{m_2 v_2 \sin\alpha}{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \arctan\left(\frac{m_2 v_2 \sin\alpha}{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha}\right)\ . \tag{4}$$

b) Zur Bestimmung der Rutschstrecke wird das zweite Newtonsche Gesetz in Rutschrichtung gebildet:

$$(m_1 + m_2) a = -\mu (m_1 + m_2) g\ . \tag{5}$$

Für die Beschleunigung gilt also

$$a = -\mu g\ . \tag{6}$$

Dabei ist

$$F_{\mathrm{R}} = -\mu (m_1 + m_2) g \tag{7}$$

die Reibkraft.

Durch Trennung der Variablen

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{8}$$

erhält man mit Gl. (6):

$$\int\limits_{v_0}^{0} v\mathrm{d}v = \int\limits_{0}^{X_R} -\mu g \mathrm{d}x \ . \tag{9}$$

Zu beachten sind die Integrationsgrenzen, am Anfang ist $v = v_0$ und $x = 0$, am Ende $v = 0$ und $x = X_R$. Nach dem Integrieren erhält man die Rutschstrecke X_R:

$$-\frac{v_0^2}{2} = -\mu g X_R \tag{10}$$

mit (aus Gl. (2) und (4)):

$$v_0 = \frac{m_2 v_2 \sin\alpha}{(m_1 + m_2)\sin\beta} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \quad X_R = \frac{v_0^2}{2\mu g} \ . \tag{12}$$

c) Zur Ermittlung der Geschwindigkeit der beiden Autos vor dem Zusammenstoß wird die Impulserhaltung aus Aufgabenteil (a) herangezogen. Auch hier ist der Impuls vor dem Stoß gleich dem nach dem Stoß (s. (a)).

Zuerst wird v_2 mit der Gleichung in y-Richtung (2) ermittelt:

$$v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} v_0 \tag{13}$$

$$= 15\sqrt{2}\ \mathrm{m/s} \ \approx 76\ \mathrm{km/h}. \tag{14}$$

Mit der Gleichung in x-Richtung (1) kann man nun v_1 berechnen:

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \tag{15}$$

$$= 30(\sqrt{3} - 1)\ \mathrm{m/s} \ \approx 79\ \mathrm{km/h}. \tag{16}$$

Die Geschwindigkeit des Golf betrug also 79 km/h, die des Mercedes 76 km/h.

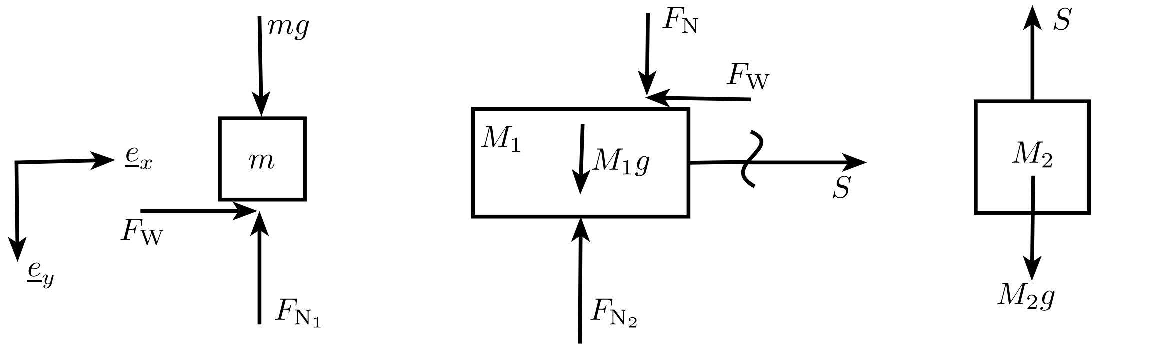

Abb. 5: Freischnitt

4. Aufgabe

$$\sum \underline{F} = \dot{\underline{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\underline{v}) = m\underline{a}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Punktmasse:} \quad \underline{e}_x: \quad m a_m = F_W \overset{\text{Coulomb}}{=} \mu m g \ , \tag{1}$$

$$\text{Klotz 1:} \quad \underline{e}_x: \quad M_1 a_1 = +S - F_W = S - \mu m g \ , \tag{2}$$

$$\text{Klotz 2:} \quad \underline{e}_y: \quad M_2 a_2 = +M_2 g - S \ . \tag{3}$$

Da das Seil undehnbar ist, muss die Beschleunigung von Klotz 1 und Klotz 2 übereinstimmen. Durch Eliminieren der Seilkraft folgt dann:

$$a_1 = a_2 = a_M \ ,$$

$$(2) + (3): \quad M_1 a_M + M_2 a_M = M_2 g - \mu m g$$

$$\Rightarrow a_M = \left(\frac{M_2 - \mu m}{M_1 + M_2}\right) g \ . \tag{4}$$

Mit den Gleichungen (1) und (4) kann man nun die gesuchten Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t^* = 2\sqrt{2\frac{h}{g}}$ bestimmen:

$$a_m = \mu g$$

$$\Rightarrow v_m = \mu g t + C_1$$

$$\text{mit} \quad v_m(t=0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$\Rightarrow v_m(t^*) = v_m^* = \mu g t^* = \frac{2}{5}\sqrt{2gh} \ .$$

Analog:

$$a_M = \left(\frac{M_2 - \mu m}{M_1 + M_2}\right) g$$

$$\Rightarrow v_M = \left(\frac{M_2 - \mu m}{M_1 + M_2}\right) g t + C_2$$

$$\text{mit} \quad v_M(t=0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_M(t^*) = v_M^* = \left(\frac{\frac{2}{5}m - \frac{1}{5}m}{\frac{2}{5}m + \frac{2}{5}m}\right) g t^* = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$$

$$v_M^* = \frac{5}{4} v_m^* \ .$$