Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

a) Ges.: $\dot{\varphi}(r_1)$?

Starte mit dem *Drallsatz* (hier in integraler Form) um den Drehpunkt (0):

$$\int_0^t \underline{M}^{(0)}\,\mathrm{d}\tilde{t} = \underline{L}_B - \underline{L}_A = \boxed{\underline{L}^{(0)}(t) - \underline{L}_0^{(0)} \overset{\text{hier}}{=} 0}\ .\ \text{(Drehimpulserhaltung)} \tag{1}$$

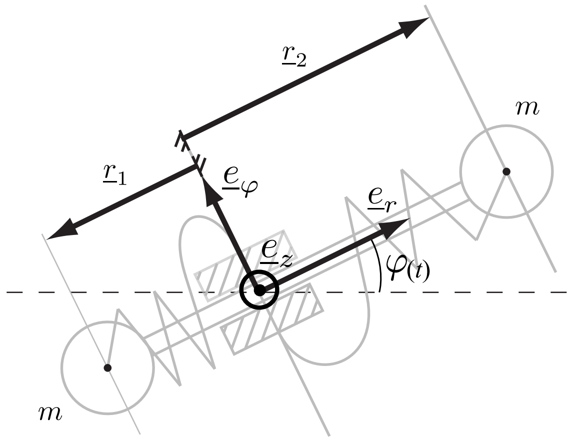

Abb. 1

$$\underline{L}_B = \underline{L}^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i = \underline{r}_1 \times m\underline{v}_1 + \underline{r}_2 \times m\underline{v}_2 \tag{2}$$

mit

$$\underline{r}_1(t) = -r_1(t)\underline{e}_r \tag{3}$$
$$\underline{v}_1 = -\dot{r}_1\underline{e}_r - r_1\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi\ , \tag{4}$$
$$\underline{r}_2(t) = r_2(t)\underline{e}_r \tag{5}$$
$$\underline{v}_2 = \dot{r}_2\underline{e}_r + r_2\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi\ . \tag{6}$$

Nach dem Ausführen der Kreuzprodukte ist:

$$\underline{L}_B = \underline{L}^{(0)}(t) = m\dot{\varphi}\left(r_1(t)^2 + r_2(t)^2\right)\underline{e}_z\ . \tag{7}$$

Bei $t = 0$ ist der anfängliche Drehimpuls:

$$\underline{L}_A = \underline{L}_0^{(0)} = m\dot{\varphi}_0\left(\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\underline{e}_z = m\dot{\varphi}_0\frac{\ell^2}{2}\underline{e}_z\ . \tag{8}$$

Die konstante Länge der Stange birgt die Nebenbedingung:

$$r_1 + r_2 = \ell \quad \Rightarrow \quad r_2 = \ell - r_1 \ , \tag{9}$$

die in Gl. (7) eingesetzt für die Drehimpulserhaltung bringt:

$$m\dot{\varphi}\left(r_1^2 + (\ell - r_1)^2\right)\underline{e}_z - m\dot{\varphi}_0\frac{\ell^2}{2}\underline{e}_z = 0 \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\varphi}(r_1) = \frac{\ell^2\dot{\varphi}_0}{2(2r_1^2 - 2\ell r_1 + \ell^2)}}} \ . \tag{11}$$

b) Die Berechnung soll mit dem *Energiesatz* erfolgen:

$$\boxed{E_A^{\text{kin}} + E_A^{\text{pot}} = E_B^{\text{kin}} + E_B^{\text{pot}}} \ (-W_{AB}) \ , \tag{12}$$

da es keine dissipativen Anteile gibt ($W_{AB} = 0$). „A“ sei der unausgelenkte Zustand und „B“ der Gestörte. Das Aufstellen der Energien für die einzelnen Massen bringt:

$$E_A^{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\underline{v}_{A1}^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_{A2}^2 \ , \quad \text{wobei } \underline{v}^2 = \underline{v}\cdot\underline{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \end{bmatrix} = v_r^2 + v_\phi^2 \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2}m\Big(\dot{r}_{A1}^2 + (r_{A1}\dot{\varphi}_A)^2 + \dot{r}_{A2}^2 + (r_{A2}\dot{\varphi}_A)^2\Big) \ , \text{ mit } v_r,\ v_\phi \text{ aus Gl. (4), (6)} \ . \tag{14}$$

Mit $\dot{r}_{A1}^2 = 0$ (da: $r_{A1} = \frac{\ell}{2} = \text{const.}$), resp. $\dot{r}_{A2}^2 = 0$ (da: $r_{A2} = \frac{\ell}{2} = \text{const.}$) und $\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_0$ folgt:

$$E_A^{\text{kin}} = m\left(\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}_0\right)^2 \ . \tag{15}$$

Da die Feder in der Ausgangslage „A“ entspannt ist, folgt:

$$E_A^{\text{pot}} = 0 \ . \tag{16}$$

Weiter:

$$E_B^{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\underline{v}_{B1}^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_{B2}^2 \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}m\Big[\dot{r}_{B1}^2 + (r_{B1}\dot{\varphi}_B)^2 + \dot{r}_{B2}^2 + (r_{B2}\dot{\varphi}_B)^2\Big] \ . \tag{18}$$

Mit $\dot{r}_{B1} = \dot{r}_1$, resp. $\dot{r}_{A2} = \dot{r}_2$ und $\dot{\varphi}_B = \dot{\varphi}$ folgt:

$$E_B^{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\left[\dot{r_1}^2 + (r_1\dot{\varphi})^2 + \dot{r_2}^2 + (r_2\dot{\varphi})^2\right] \ . \tag{19}$$

Mit der zeitl. Ableitung von Gl. (9) ($\dot{r}_1 = -\dot{r}_2$) ergibt sich:

$$E_B^{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\left[2\dot{r}_1^2 + \left(r_1^2 + (\ell - r_1)^2\right)\dot{\varphi}^2\right] \ . \tag{20}$$

Die potentielle Energie der ausgelenkten Federn im Falle „B“ ist:

$$E_B^{\text{pot}} = \frac{1}{2}c\Delta r_1^2 + \frac{1}{2}c\Delta r_2^2 = \frac{1}{2}c\left[\left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2} - r_2\right)^2\right] = c\left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)^2 \ . \tag{21}$$

Alle Energieausdrücke in den Energiesatz (Gl. 12) eingesetzt, liefert:

$$\frac{1}{2}m\dot{\varphi}_0^2\frac{\ell^2}{2} + 0 = \frac{1}{2}m\left[2\dot{r}_1^2 + \left(2r_1^2 - 2\ell r_1 + \ell^2\right)\dot{\varphi}^2\right] + c\left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)^2 . \tag{22}$$

Mit $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(r_1)$ aus Aufgabenteil (a) liefert eine Umformung nach $\dot{r}_1(r_1)$:

$$\underline{\underline{\dot{r}_1(r_1) = \pm\sqrt{\frac{\ell^2\dot{\varphi}_0^2}{4r_1^2 - 4r_1\ell + 2\ell^2} - \frac{c}{m}}\left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)}} . \tag{23}$$

c) In einer Ruhelage muss gelten: $\dot{r}_1 \stackrel{!}{=} 0$

$$\dot{r}_1(r_1) = \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\left[\pm\sqrt{\frac{\ell^2\dot{\varphi}_0^2}{4r_1^2 - 4r_1\ell + 2\ell^2} - \frac{c}{m}}\right] \stackrel{!}{=} 0 \tag{24}$$

1)

$$\left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_{1_1} = \frac{\ell}{2}}} . \tag{25}$$

Das ist die Ausgangslage des Systems, die natürlich auch eine Ruhelage ist.

2)

$$\sqrt{\frac{\ell^2\dot{\varphi}_0^2}{4r_1^2 - 4r_1\ell + 2\ell^2} - \frac{c}{m}} = 0$$

$$\frac{\ell^2\dot{\varphi}_0^2}{4r_1^2 - 4r_1\ell + 2\ell^2} = \frac{c}{m} \tag{26}$$

$$r_1^2 - \ell r_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\dot{\varphi}_0^2 m}{4c}\right)\ell^2 = 0 \tag{27}$$

$p - q-$Formel:

$$\underline{\underline{r_{1_{2,3}}}} = \frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{\ell^2}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\dot{\varphi}_0^2 m}{4c}\right)\ell^2} = \underline{\underline{\frac{\ell}{2}\left[1 \pm \sqrt{\frac{m}{c}\dot{\varphi}_0^2 - 1}\right]}} . \tag{28}$$

Abhängig von der Richtung der Störung ($\pm$) ergeben sich so die zwei Lösungen für eine weitere Ruhelage des Systems.

d) <u>Ges.</u>: Bedingung für die Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$?

Die Gleichung (28) sollte reelle Lösungen besitzen.

$$\frac{m}{c}\dot{\varphi}_0^2 - 1 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\underline{\dot{\varphi}_0 > \sqrt{\frac{c}{m}}}} . \tag{29}$$

Erfüllt die Anfangsgeschwindigkeit diese Bedingung, so kann das System in eine Lage gelangen, in der die radiale Geschwindigkeit Null wird, wobei sich die Lage dann von der Trivialen unterscheidet.

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Ausblick

Wir wollen die Bewegung genauer untersuchen und benötigen die Bewegungsdifferentialgleichung. Dies gelingt leicht mit dem zweiten NEWTON'schen Grundgesetz und dem Schwerpunktsatz. Wir stellen erst den Beschleunigungsvektor zum Schwerpunkt auf:

$$\underline{r}_s = \frac{mr_1 - mr_2}{2m}\underline{e}_r = \frac{r_1 - r_2}{2}\underline{e}_r = \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\underline{e}_r \tag{30}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{r}}_s = \dot{r}_1\underline{e}_r + \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\underline{r}}_s = \left(\ddot{r}_1 - \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\dot{\varphi}^2\right)\underline{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\ddot{\varphi}\right)\underline{e}_\varphi \ . \tag{32}$$

Nun machen wir einen Freischnitt für die Stange um alle Kräfte sichtbar zu machen und in r-Richtung zu summieren.

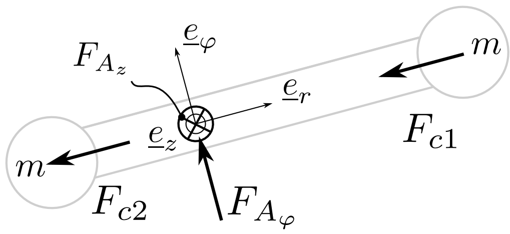

Abb. 2: Freischnitt

$$\underline{e}_r: \quad \sum F_r \stackrel{!}{=} 2m\left(\ddot{r}_1 - \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\dot{\varphi}^2\right) = -c\left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right) - c\left(\frac{\ell}{2} - r_2\right) = -2c\left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right) \ . \tag{33}$$

Damit haben wir eine Differentialgleichung für die Verschiebung in radialer Richtung gefunden:

$$\ddot{r}_1 + \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{c}{m} - \dot{\varphi}^2\right) = 0 \ . \tag{34}$$

Hier können wir den in (a) gewonnen Zusammenhang für $\dot{\varphi}$ einsetzen:

$$\boxed{\ddot{r}_1 + \left(r_1 - \frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{c}{m} - \frac{\ell^4\dot{\varphi}_0^2}{4\left(2r_1^2 - 2r_1\ell + \ell^2\right)^2}\right) = 0}\ , \tag{35}$$

und erhalten eine höchst nicht-lineare Differentialgleichung für $r_1(t)$ die es gilt numerisch zu lösen.

Hausaufgaben

2. Aufgabe

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{r}_1 &= \ell_1 \underline{e}_{r_1} \ , \\
\underline{r}_2 &= \ell_2 \underline{e}_{r_2} \ , \\
\underline{v}_1 &= \underline{r}_1 \times \underline{\omega}_1 = \ell_1 \underline{e}_{r_1} \times \dot{\varphi}_1 \underline{e}_{z_1} = \ell_1 \dot{\varphi}_1 \underline{e}_{\varphi_1} \\
\underline{v}_2 &= \underline{r}_2 \times \underline{\omega}_2 = \ell_2 \underline{e}_{r_2} \times \dot{\varphi}_2 \underline{e}_{z_2} = \ell_2 \dot{\varphi}_2 \underline{e}_{\varphi_2} \ .
\end{aligned}$$

Die $\underline{e}_z$-Achse fällt bei beiden zusammen:

$$\underline{e}_{z_1} = \underline{e}_{z_2} \ .$$

Drallsatz (integrale Form):

$$\int_{t_0}^{t_1} \underline{M} \mathrm{d}t = \underline{L}(t_1) - \underline{L}(t_0)$$

mit

$$\begin{aligned}
\underline{L} &= \underline{r} \times m\dot{\underline{r}} \ , \\
\text{äußeres Moment } &= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} 0 \mathrm{d}t = \underline{L}(t_1) - \underline{L}(t_0) \ .$$

Es ist $\underline{L}(t_0) = 0$ da $\underline{v}_{10} = \underline{v}_{20} = 0$ und

$$\underline{L}(t_1) = \sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i = m_1 \ell_1^2 \dot{\varphi}_1 \underline{e}_z + m_2 \ell_2^2 \dot{\varphi}_2 \underline{e}_z \ .$$

Einsetzen von $\underline{L}(t_0)$ und $\underline{L}(t_1)$ in den Drallsatz:

$$m_1 \ell_1^2 \dot{\varphi}_1 \underline{e}_z = -m_2 \ell_2^2 \dot{\varphi}_2 \underline{e}_z$$

Daraus mit der Abkürzung $M_1 = \frac{m_1 \ell_1^2}{m_2 \ell_2^2}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_2 &= -M_1 \dot{\varphi}_1 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} &= -M_1 \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow \quad \int_{\varphi_{20}}^{\varphi_2} \mathrm{d}\overline{\varphi}_2 &= -M_1 \int_0^{\varphi_1} \mathrm{d}\overline{\varphi}_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_{20} - M_1 \varphi_1 \ .$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2. Ges.: $\dot{\varphi}_1(\varphi_1)$ durch Energiesatz.

$$E_0^{\text{kin}} + E_0^{\text{pot}} = E_1^{\text{kin}} + E_1^{\text{pot}}$$

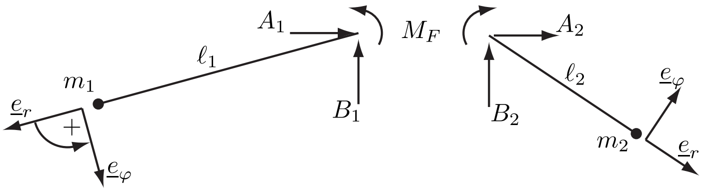

Abb. 3: Freischnitt

$$E_0^{\text{kin}} = 0 \ ,$$
$$E_0^{\text{pot}} = \frac{c_{\text{d}}}{2}(\varphi_{20} - \Psi_0)^2$$

$$\begin{aligned} E_1^{\text{kin}} &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 (1 + M_1) \ , \\ E_1^{\text{pot}} &= \frac{1}{2}c_{\text{d}}(\varphi_2 - \varphi_1 - \Psi_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}c_{\text{d}}\left[(\varphi_{20} - \Psi_0) - \varphi_1(1 + M_1)\right]^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Rechnung:

$$\dot{\varphi}_1^2 = \frac{c_{\text{d}}}{m_1 \ell_1^2}\varphi_1 \left[2(\varphi_{20} - \Psi_0) - (1 + M_1)\varphi_1\right] \ .$$

3. Ges.: $\varphi_{\max}$ in Ruhe, d. h. $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$ mit $\varphi_{1m} \neq 0$ (Ausgangslage).

   Aus Energiesatz aus (b):

$$2(\varphi_{20} - \Psi_0) = (1 + M_1)\varphi_{1m}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{1m} = \frac{2(\varphi_{20} - \Psi_0)}{1 + M_1} \ ,$$
$$\varphi_{2m} = \varphi_{20} - \frac{2M_1}{1 + M_1}(\varphi_{20} - \Psi_0) \ .$$