Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Die EULERschen Kinematikgleichungen für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auf einem Starrkörper lauten im Allgemeinen:

$$\underline{v}^{\mathrm{P}} = \underline{v}^{\mathrm{A}} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{\mathrm{AP}} , \qquad \underline{a}^{\mathrm{P}} = \underline{a}^{\mathrm{A}} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{x}^{\mathrm{AP}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}^{\mathrm{AP}}) .$$

Dabei bezeichnet A einen beliebigen Bezugspunkt, dessen Bewegungszustand bekannt ist. Das Symbol P bezeichnet einen beliebigen Punkt auf dem starren Körper.

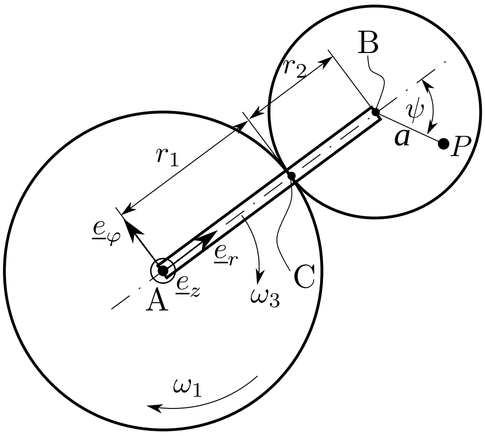

Abb. 1: Graphische Darstellung des Getriebe inkl. des verwendeten Polarkoordinatensystems.

Im ersten Schritt wird die Geschwindigkeit v^{B} des Punktes B mit der EULERschen Kinematikgleichungen für die Verbindungsstange 3 berechnet. Der Momentanpol der Stange liegt im Punkt A, da dort ein Festlager angebracht ist. Da $\underline{v}^{\mathrm{A}} = \underline{0}$ ist, ergibt sich EULERschen Kinematikgleichung mit $\underline{\omega}_3 = -\omega_3 \underline{e}_z$ und $\underline{x}^{\mathrm{AB}} = (r_1 + r_2)\underline{e}_r$ zu:

$$\underline{v}_3^{\mathrm{B}} = \underline{\omega}_3 \times \underline{x}^{\mathrm{AB}} = -\omega_3 \underline{e}_z \times (r_1 + r_2)\underline{e}_r = -\omega_3 (r_1 + r_2)\underline{e}_\varphi . \tag{1}$$

Da die Stange und das Planetenrad durch das Gelenk fest miteinander verbunden sind, gilt natürlich $\underline{v}_3^{\mathrm{B}} = \underline{v}_2^{\mathrm{B}} = \underline{v}^{\mathrm{B}}$.

Ziel ist es nun die Winkelgeschwindigkeit ω_2 des Planetenrades zu bestimmen. Dazu wird die Abrollbedingung im Punkt C genutzt. Die Geschwindigkeit von Punkt C auf dem Sonnenrades ist gegeben durch:

$$\underline{v}_1^{\mathrm{C}} = \underline{\omega}_1 \times \underline{x}^{\mathrm{AC}} = -\omega_1 \underline{e}_z \times r_1 \underline{e}_r = -\omega_1 r_1 \underline{e}_\varphi . \tag{2}$$

Dabei wurde wiederum die Tatsache ausgenutzt, dass der Momentanpol des Sonnenrades ebenfalls im Punkt A liegt. Die Geschwindigkeit von Punkt C auf dem Planeten wird mit Hilfe von $\vec{v}^{\mathrm{B}}$ berechnet. Mit $\underline{x}_{BC} = -r_2 \underline{e}_r$ ergibt sich:

$$\underline{v}_2^{\mathrm{C}} = \underline{v}^{\mathrm{B}} + \underline{\omega}_2 \times \underline{x}^{\mathrm{BC}} = -\omega_3 (r_1 + r_2)\underline{e}_\varphi + \omega_2 \underline{e}_z \times (-r_2 \underline{e}_r) = -\left(\omega_2 r_2 + \omega_3 (r_1 + r_2)\right) \underline{e}_\varphi . \tag{3}$$

Zwischen dem Sonnenrad und dem Planetenrad tritt reines Rollen auf. Das heißt die Relativgeschwindigkeit zwischen den Kontaktpartner ist Null: $\underline{v}_2^{\mathrm{C}} - \underline{v}_2^{\mathrm{C}} = \underline{0}$ bzw. $\underline{v}_2^{\mathrm{C}} = \underline{v}_3^{\mathrm{C}}$. Somit folgt für die

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Winkelgeschwindigkeit ω_2:

$$\underline{v}_2^{\mathrm{C}} = \underline{v}_3^{\mathrm{C}} \Leftrightarrow -\omega_1 r_1 \underline{e}_\varphi = -\left(\omega_2 r_2 + \omega_3(r_1+r_2)\right)\underline{e}_\varphi \Rightarrow \omega_1 r_1 = \left(\omega_2 r_2 + \omega_3(r_1+r_2)\right)$$
$$\Leftrightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1 - \omega_3(r_1+r_2)}{r_2}\,. \quad (4)$$

Die Geschwindigkeitsvektor des Punktes P lässt sich nun durch Anwendung der Eulerschen Kinematikgleichung auf dem Planetenrad berechnen. Es gilt mit $\underline{x}^{\mathrm{BP}} = a(\cos(\psi)\underline{e}_r - \sin(\psi)\underline{e}_\varphi)$:

$$\begin{aligned}\underline{v}^{\mathrm{P}} &= \underline{v}_2^{\mathrm{P}} = \underline{v}^{\mathrm{B}} + \underline{\omega}_2 \times \underline{x}^{\mathrm{BP}} = -\omega_3(r_1+r_2)\underline{e}_\varphi + \omega_2\underline{e}_z \times a(\cos(\psi)\underline{e}_r - \sin(\psi)\underline{e}_\varphi)\\ &= -\omega_3(r_1+r_2)\underline{e}_\varphi + \omega_2 a\cos(\psi)\underline{e}_\varphi + \omega_2 a\sin(\psi)\underline{e}_r = -\left(\omega_3 + \tfrac{r_1}{r_2}(\omega_3-\omega_1)\right)a\sin(\psi)\underline{e}_r -\\ &\quad - \left(\omega_3(r_1+r_2) + (\omega_3 + \tfrac{r_1}{r_2}(\omega_3-\omega_1)a\cos(\psi))\right)\underline{e}_\varphi\,. \end{aligned} \quad (5)$$

Als nächstes sollen die Beschleunigung $\vec{a}^{\mathrm{P}}$ des Punktes P berechnet werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_3 konstant sind und der Punkt P fest auf dem Planetenrad verankert ist. Zunächst wird die Lösung mit Hilfe der Eulerschen Kinematikgleichung für die Beschleunigung berechnet. In einem zweiten Schritt wird diese Ergebnis durch Differentiation nach der Zeit überprüft.

Für die Beschleunigung des Punktes P gilt unter Verwendung des Bezugspunktes B:

$$\underline{a}^{\mathrm{P}} = \underline{a}_2^{\mathrm{P}} = \underline{a}^{\mathrm{B}} + \underline{\dot{\omega}}_2 \times \underline{x}_{\mathrm{BP}} + \underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{x}^{\mathrm{BP}})\,. \quad (6)$$

Da $\dot{\omega}_2 = 0$ ist, verschwindet der mittlere Term. Das doppelte Kreuzprodukt kann mit Hilfe der Grassmann-Identität (bac-cab-Formel) wie folgt berechnet werden:

$$\underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{x}^{\mathrm{BP}}) = (\underline{\omega}_2 \cdot \underline{x}^{\mathrm{BP}})\vec{\omega}_2 - (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_2)\underline{x}^{\mathrm{BP}} = -a\omega_2^2 a\left(\cos(\psi)\underline{e}_r - \sin(\psi)\right)\,. \quad (7)$$

Die Beschleunigung $\underline{a}^{\mathrm{B}}$ lässt sich wiederum mit Hilfe der Eulerschen Kinematikgleichung für Stange berechnen:

$$\underline{a}^{\mathrm{B}} = \underline{a}_3^{\mathrm{B}} = \underline{a}_3^{\mathrm{A}} + \underline{\dot{\omega}}_3 \times \underline{x}^{\mathrm{AB}} + \left(\underline{\omega}_3 \cdot \underline{x}^{\mathrm{AB}}\right)\underline{\omega}_3 - (\underline{\omega}_3 \cdot \underline{\omega}_3)\,\underline{x}^{\mathrm{AB}} = -(r_1+r_2)\omega_3^2\underline{e}_r\,. \quad (8)$$

Substitution der beiden letzten Gleichungen in die drittletzte Gleichung ergibt die gesuchte Beschleunigung:

$$\underline{a}^{\mathrm{P}} = -(r_1+r_2)\omega_3^2\underline{e}_r - a\omega_2^2\left(\cos(\psi)\underline{e}_r - \sin(\psi)\underline{e}_\varphi\right)\,. \quad (9)$$

Nun wird die zeitliche Ableitung von $\underline{v}^{\mathrm{P}}$ gebildet um das Ergebnis zu prüfen. Wegen der Produktregel und den Ableitungsregel der Basisvektor in Polarkoordinaten gilt:

$$\underline{a}^{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{d}\underline{v}^{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} = (r_1+r_2)\omega_3\dot{\varphi}\underline{e}_r - \omega_2 a\sin(\psi)\dot{\psi}\underline{e}_\varphi - \omega_2 a\cos(\psi)\dot{\varphi}\underline{e}_r + \omega_2 a\cos(\psi)\dot{\psi}\underline{e}_r + \omega_2 a\sin(\psi)\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi\,. \quad (10)$$

Für den Winkel φ gilt $\varphi(t) = -\omega_3 t + \varphi_0$, da sich die Stange entgegen des Uhrzeigersinns dreht. Somit folgt $\dot{\varphi} = -\omega_3$, was nicht dem üblichen Fall $\dot{\varphi} = \omega$ entspricht. Substitution von $\dot{\varphi}$ liefert zunächst:

$$\underline{a}^{\mathrm{P}} = -(r_1+r_2)\omega_3^2\underline{e}_r - \omega_2 a\sin(\psi)\dot{\psi}\underline{e}_\varphi + \omega_2\omega_3 a\cos(\psi)\underline{e}_r + \omega_2 a\cos(\psi)\dot{\psi}\underline{e}_r - \omega_2\omega_3 a\sin(\psi)\underline{e}_\varphi\,. \quad (11)$$

Die Winkel ψ wird gegenüber der Stange gemessen. Da die Stange sich bewegt, haben somit die Winkelgeschwindigkeiten ω_2 und ω_3 einen Anteil an der Winkeländerung. Die relative Bewegung der Stange zum Planetenrad ist entscheidend. Es gilt:

$$\psi(t) = -(\omega_2 + \omega_3)t + \psi_0\,, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\psi} = -(\omega_2 + \omega_3)\,. \tag{12}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung lässt sich schnell durch zwei Gedankenexperimente bestätigen. Zunächst wird die Stange festgehalten, d. h. $\omega_3 = 0$. Dann bewegt sich das Planetenrad entgegen des Uhrzeigersinns, d. h. $\omega_2 = \omega_1 r_1/r_2 > 0$. Somit wird der Winkel ψ, welcher wie entgegen des Uhrzeigersinn positiv gemessen immer kleiner, was durch die obige Gleichung bestätigt wird. Im zweiten Fall soll der Winkel ψ konstant bleiben, was einer gleichförmige Bewegung des Planetenrades und der Stange entspricht. Beide Körper würden sich wie ein einzelner starre Körper bewegen. Das heißt die Winkelgeschwindigkeit beider Körper müsste gleich sein. Die obige Gleichung bestätigt ebenfalls diese Aussage. Es würde $\omega_2 = -\omega_3 < 0$. Das negative Vorzeichen rührt daher, dass sich das Planetenrad im Uhrzeigersinn drehen würde und ω_2 entgegen des Uhrzeigersinns positive gemessen wird.

Eine Substitution von $\dot{\psi}$ in die vorletzte Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}\underline{a}^{\mathrm{P}} = -(r_1 + r_2)\omega_3^2\underline{e}_r + \omega_2 a\sin(\psi)(\omega_2 + \omega_3)\underline{e}_\varphi + \omega_2\omega_3 a\cos(\psi)\underline{e}_r - \omega_2 a\cos(\psi)(\omega_2 + \omega_3)\underline{e}_r - \\ - \omega_2\omega_3 a\sin(\psi)\underline{e}_\varphi = -(r_1 + r_2)\omega_3^2\underline{e}_r - a\omega_2^2\left(\cos(\psi)\underline{e}_r - \sin(\psi)\underline{e}_\varphi\right)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem, welches mit Hilfe der EULERsche Kinematikgleichung für die Beschleunigung berechnet worden ist. Offensichtlich ist die Anwendung der EULERsche Kinematikgleichungen für den vorliegenden Fall einfacher, da lediglich der Vektor $\underline{x}^{\mathrm{BP}}$ nötig ist, welcher nicht die Ableitung des Winkels ψ enthält. Außerdem sei angemerkt, dass die Anwendung der Produktregeln bei der Differentiation sowie die Bestimmung von $\dot{\psi}$ sehr fehleranfällig sind.

2. Aufgabe

Das Massenträgheitsmoment eines Zylinder mit der Masse M, dem Radius R und der Länge L soll durch Integration berechnet werden. Das Trägheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt S und die z-Achse, welche hier die Drehachse sein soll, ist gegeben durch:

$$\Theta_{zz}^{\mathrm{S})} = \int_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = \int_M r^2\,\mathrm{d}m\,, \tag{1}$$

wobei $r = x^2 + y^2$ den radialen Abstand von der z-Achse darstellt. Es werden natürlich die Zylinderkoordinaten (r,φ,z) verwendet. Es gilt nun, einen Ausdruck für das infinitesimale Massenelement dm zu finden. Zunächst gilt mit der Dichte ρ

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V\,. \tag{2}$$

Für die infinitesimale Volumenelement lässt sich in Zylinderkoordinaten schreiben:

$$\mathrm{d}V = \,\mathrm{d}r r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,. \tag{3}$$

Damit ergibt sich bei konstanter Massendichte $\rho = \rho_0$:

$$\Theta_{zz}^{(\mathrm{S})} = \rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z = \rho_0 \frac{R^4}{4} 2\pi L = \frac{\pi}{2} \rho_0 L R^4 \,. \tag{4}$$

Mit der Gesamtmasse $M = \rho V = \rho L \pi R^2$ folgt:

$$\Theta_{zz}^{(\mathrm{S})} = \frac{1}{2} M R^2 \,. \tag{5}$$

Hausaufgaben

3. Aufgabe

a) Punkt 1 ist ein Punkt auf dem Rand des Sonnenrads. Er hat dieselbe Geschwindigkeit wie ein Punkt des Planetenrads, der zum betrachteten Zeitpunkt an derselben Stelle ist (reines Rollen). Die Eulersche Geschwindigkeitsformel für Punkt 1 liefert:

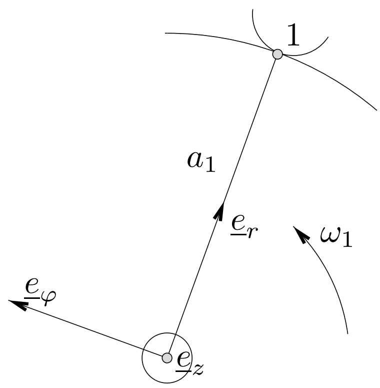

Abb. 2: Punkt 1 auf dem Rand des Sonnenrads mit zugehörigem Polarkoordinatensystem.

$$\underline{v}_1 = \underline{0} + \underline{\omega}_1 \times a_1 \underline{e}_r = \omega_1 \underline{e}_z \times a_1 \underline{e}_r = a_1 \omega_1 \underline{e}_\varphi \,. \tag{1}$$

Punkt 2 ist ein Punkt auf dem Innenrand des Hohlrads. Er hat dieselbe Geschwindigkeit wie ein Punkt des Planetenrads, der zum betrachteten Zeitpunkt an derselben Stelle ist (reines Rollen).

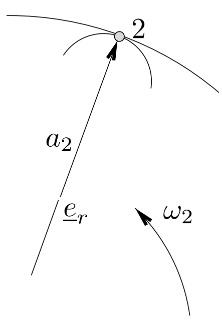

Abb. 3: Punkt 1 auf dem Rand des Planetenrades

Es folgt wie oben:

$$\underline{v}_2 = \underline{0} + \underline{\omega}_2 \times a_2 \underline{e}_r = a_2 \omega_2 \underline{e}_\varphi \,. \tag{2}$$

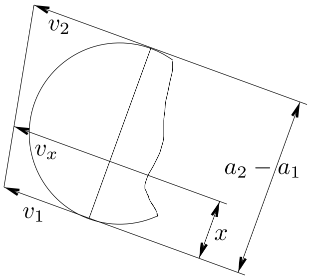

Abb. 4

Kennt man die Geschwindigkeiten zweier Punkte eines Starrkörpers, so können die Geschwindigkeiten der Punkte auf der Geraden zwischen den 2 Punkten durch lineare Interpolation berechnet werden. Die Geschwindigkeitsverteilung ist linear. Speziell gilt hier:

$$\underline{v}_x = \underline{v}_1 + \frac{x}{a_2 - a_1}(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) \ . \tag{3}$$

Der Mittelpunkt des Planetenrades bewegt sich also mit der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{v}_1 + \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \\ \Rightarrow |\underline{v}| &= \frac{1}{2}|\underline{v}_1 + \underline{v}_2| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1\omega_1 + a_2\omega_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}(a_1\omega_1 + a_2\omega_2) \ . \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit im Mittelpunkt des Rades ist also der Mittelwert aus oberster und unterster Geschwindigkeit.

b) Eulersche Formel auf dem Planetenrad:

$$\begin{aligned} \underline{v}_2 &= \underline{v}_1 + \underline{\omega} \times (a_2 - a_1)\underline{e}_r \\ \Leftrightarrow (a_2\omega_2 - a_1\omega_1)\underline{e}_\varphi &= \omega \underline{e}_z \times (a_2 - a_1)\underline{e}_r \\ \Rightarrow \omega &= \frac{a_2\omega_2 - a_1\omega_1}{a_2 - a_1} \ . \end{aligned}$$

c) Die Geschwindigkeit des Planetenradträgers ist an einem Punkt bekannt, sie muss nämlich mit der des Planetenradmittelpunkts übereinstimmen. Daher gilt:

$$\begin{aligned} v\underline{e}_\varphi &= \underline{\omega}^* \times \frac{a_1 + a_2}{2}\underline{e}_r \\ \omega^* &= \frac{2v}{a_1 + a_2} \\ &= \frac{a_1\omega_1 + a_2\omega_2}{a_1 + a_2} \ . \end{aligned}$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

4. Aufgabe

a) **Freischnitt der einzelnen Körper:**

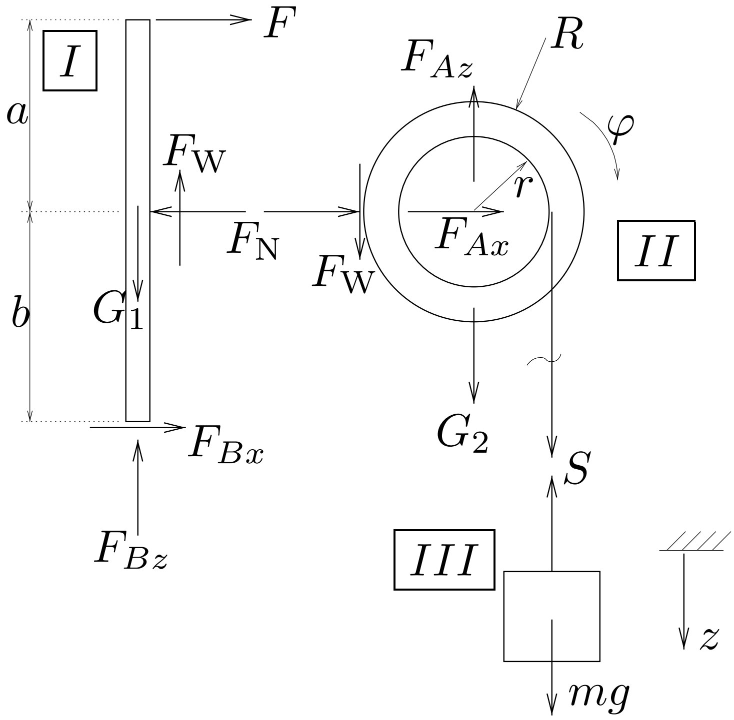

Abb. 5

Nun werden der Schwerpunktsatz und der Drallsatz für jeden Freischnitt aufgestellt.

Körper I:
Der Hebel befindet sich im statischen Gleichgewicht. Aus dem Schwerpunktsatz erhält man:

$$\underline{e}_x : m a_{\mathrm{I}x} = 0 = \sum F_x = F - F_{\mathrm{N}} + F_{Bx} \ , \tag{1}$$

$$\underline{e}_z : m a_{\mathrm{I}z} = 0 = \sum F_z = -F_{Bz} + G_1 - F_{\mathrm{W}} \ . \tag{2}$$

Diese beiden Gleichungen ermöglichen die Bestimmung der unbekannten Lagerreaktionen F_{Bx} und F_{Bz}, die hier jedoch nicht interessieren.

Der Drallsatz liefert:

$$\Theta \ddot{\varphi} = 0 = \sum M^B = -F(a+b) + F_{\mathrm{N}} b = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{N}} = F\left(\frac{a}{b} + 1\right) \ . \tag{3}$$

Mit dem Coulombschen Reibgesetz ergibt sich:

$$F_{\mathrm{W}} = \mu F_{\mathrm{N}} = \mu \left(\frac{a}{b} + 1\right) F \ . \tag{4}$$

Körper III:
Der Drallsatz und der Schwerpunktsatz in $\underline{e}_x$-Richtung am Körper III liefern nur die wahre aber

triviale Aussage 0 = 0. Nur der Schwerpunktsatz in $\underline{e}_z$-Richtung ist interessant:

$$\underline{e}_z : m\ddot{z} = mg - S \tag{5}$$
$$\Rightarrow S = m(g - \ddot{z}) \; . \tag{6}$$

Körper II:
Der Schwerpunktsatz liefert die zwei Bestimmungsgleichungen für die Lagerreaktionen F_{Az} und F_{Ax}:

$$\underline{e}_x : ma_{\mathrm{II}x} = 0 = \sum F_x = F_\mathrm{N} + F_{Ax} \; , \tag{7}$$
$$\underline{e}_z : ma_{\mathrm{II}z} = 0 = \sum F_z = -F_{Az} + G_2 + S + F_\mathrm{W} \; . \tag{8}$$

Drallsatz:
Der Drehsinn ist linksherum positiv, man beachte die Wahl der Zählrichtung von φ (s. Freischnitt):

$$-\Theta^A\ddot{\varphi} = \sum M^A \tag{9}$$
$$\Rightarrow -\Theta^A\ddot{\varphi} = RF_\mathrm{W} - Sr \; . \tag{10}$$

Gleichungssystem umformen und Kinematik:
Einsetzen von (4) und (6) in (10):

$$\Rightarrow \Theta^A\ddot{\varphi} = -R\mu F\left(\frac{a}{b} + 1\right) + mr(g - \ddot{z}) \; . \tag{11}$$

Diese Gleichung enthält noch zu viele Unbekannte. Eine weitere Gleichung erhalten wir aus der Kinematik. Das System hat nur einen Freiheitsgrad. Ist die Bewegung der Scheibe bekannt, so ist auch eindeutig, wie sich die Masse bewegt. Es gilt nun den Zusammenhang zwischen den Koordinaten φ und z aus der Kinematik zu finden:

$$r\dot{\varphi} = \dot{z} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{z}}{r} \; . \tag{12}$$

Einsetzen dieses Zusammenhangs in (11) liefert nach Umstellen:

$$\left(\frac{\Theta^A}{r} + mr\right)\ddot{z} = mgr - \mu RF\left(\frac{a}{b} + 1\right) \tag{13}$$
$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{mgr - \mu\left(\frac{a}{b} + 1\right)RF}{\frac{\Theta^A}{r} + mr} \; . \tag{14}$$

Nun ist die Gleichung reduziert auf die Unbekannte $\ddot{z}$ und das gesuchte F. Die letzte nötige Gleichung erhalten wir aus der Bedingung, dass das System zur Zeit T zum Stillstand kommen soll. Integration von (14) nach der Zeit liefert:

$$\dot{z} = \frac{mgr - \mu\left(\frac{a}{b} + 1\right)RF}{\frac{\Theta^A}{r} + mr}t + C_1 \tag{15}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\dot{z}(t=0) \overset{!}{=} v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}(t) = \frac{mgr - \mu\left(\frac{a}{b}+1\right)RF}{\frac{\Theta^A}{r} + mr} t + v_0 \; . \tag{17}$$

Forderung:

$$\dot{z}(t=T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{mgr - \mu\left(\frac{a}{b}+1\right)RF}{\frac{\Theta^A}{r} + mr} t + v_0 = 0 \; . \tag{18}$$

Umformung nach F:

$$F = \frac{v_0\left(\frac{\Theta^A}{r} + mr\right) + mgrT}{\mu\left(\frac{a}{b}+1\right)RT} \; . \tag{19}$$

b) Nun ist der Weg zu berechnen, den die Masse m während des Bremsvorgangs zurücklegt. Aus Gl. (17) folgt nach nochmaliger Integration nach der Zeit für den Ort:

$$z(t) = \frac{mgr - \mu\left(\frac{a}{b}+1\right)RF}{\frac{\Theta^A}{r} + mr}\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2 \tag{20}$$

mit der Anfangsbedingung $z(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$ ergibt sich der „Bremsweg“ zu:

$$z(t=T) = \frac{mgr - \mu\left(\frac{a}{b}+1\right)RF}{\frac{\Theta^A}{r} + mr}\frac{T^2}{2} + v_0 T \; . \tag{21}$$

Nach Einsetzen von F aus Gleichung (19) in (21):

$$z(t=T) = -\frac{1}{2}v_0 T + v_0 T \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}v_0 T \; . \tag{23}$$

c) **Freischnitt für den Gleichgewichtszustand:**

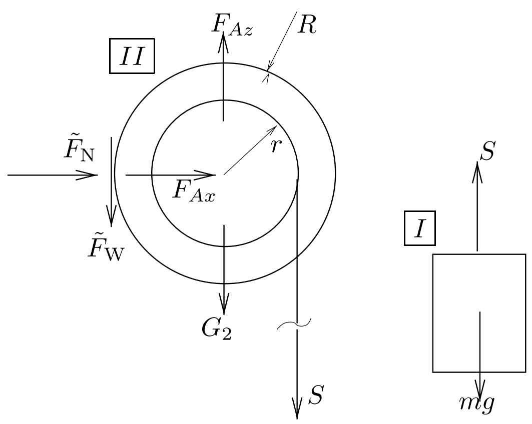

Abb. 6

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Gleichgewichtsbedingung am Körper II:

$$\sum M^A = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{F}_\mathrm{W} R - Sr = 0 \; . \tag{24}$$

Gleichgewichtsbedingung am Körper I:

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad S = mg \; . \tag{25}$$

Einsetzen von Gleichung (25) in (24) ergibt:

$$\tilde{F}_\mathrm{W} = mg \frac{r}{R} \; . \tag{26}$$

Für die Haftreibkraft $\tilde{F}_\mathrm{W}$ ist nun der Haftreibungskoeffizient μ_0 zu verwenden. Es gilt:

$$\tilde{F}_\mathrm{W} = \mu_0 \tilde{F}_\mathrm{N} \; . \tag{27}$$

Die Normalkraft $\tilde{F}_\mathrm{N}$ ist analog zu Aufgabenteil (a) entsprechend Gleichung (3) zu berechnen:

$$\tilde{F}_\mathrm{N} = \tilde{F} \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \; . \tag{28}$$

(26) und (28) in (27) einsetzen:

$$mg \frac{r}{R} = \mu_0 \tilde{F} \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \tag{29}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F} = \frac{mgr}{\mu_0 R \left(\frac{a}{b} + 1 \right)} \; . \tag{30}$$