**Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin



# Tutoriumsaufgaben

## 1. Aufgabe

a) Zum Aufstellen des Energiesatzes wird das Nullniveau der potentiellen Energie in die tiefste Stelle der Bahn gelegt. Die Bewegung beginnt im Punkt A aus der Ruhe und somit ist die kinetische Energie null. Im Folgenden wird mit dem Symbol $v$ stets die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $S$, d. h. $v \equiv |\underline{v}|$.

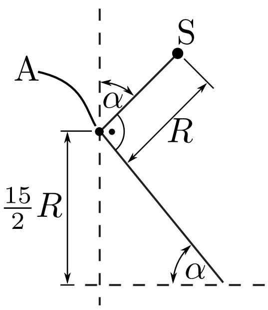


**Abb. 1:** Skizze zur Bestimmung der Höhe des Schwerpunktes, falls sich die Rolle im Punkt A befindet.

Mit Hilfe der Skizze in Abb. 1 kann die Höhe des Schwerpunktes in der Lage A bestimmt werden. Aus der Geometrie folgt:

$$h_A = \frac{15}{2}R + R\cos(\alpha) = 8R\,. \tag{1}$$

Somit gilt für die kinetische und potentielle Energie im Punkt A $E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{kin}} = 0$ und $E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{pot}} = 8mgR$. Da die Bewegung reibungsfrei ist, verschwindet die Arbeit der dissipativen Kräfte. Der Energiesatz vom Punkt A zum Punkt B lautet somit:

$$E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{B}}^{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{B}}^{\mathrm{pot}} \Leftrightarrow 8mgR = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2}\Theta^{\mathrm{S}}\omega_{\mathrm{B}}^2 + mgh_{\mathrm{B}}\,. \tag{2}$$

Dabei ist zu beachten, dass die kinetische Energie sich aus einem translatorischen und einem rotatorischen Anteil zusammensetzt. Die rechte Seite der obigen Gleichung enthält drei Unbekannte: $v_{\mathrm{B}}$, $\omega_{\mathrm{B}}$ und $h_{\mathrm{B}}$. Letztere wird im Folgenden mit geometrischen Überlegungen bestimmt.

Auf der Rolle sind $n$ Windungen des Seils aufgewickelt. Das heißt die aufgewickelte Länge des Seils lässt sich mit dem Umfang des Kreises berechnen. Für die Länge des Seils gilt: $\ell = nU = n2\pi r$. Im Punkt B ist das Seil vollständig von Rolle abgewickelt. Das heißt, dass der Schwerpunkt S auf der schiefen Ebene die Strecke $2\pi nr$ zurückgelegt hat. Somit ergibt sich die Höhe des Schwerpunktes im Zustand B zu:

$$h_{\mathrm{B}} = h_{\mathrm{A}} - 2\pi nr\sin(\alpha) = 8R - 8\sqrt{3}\,r\sin(\alpha) = 8R - 12r = 2R\,. \tag{3}$$

Um die Beziehung zwischen $v_{\mathrm{B}}$ und $\omega_{\mathrm{B}}$ zu bestimmen, ist eine kinematische Kopplungsbedingung nötig. Auf dem Abschnitt vom Punkt A zum Punkt B rollt der Körper auf dem Seil ab und rutscht auf der Bahn hinunter. Die Rotation ist dem Uhrzeigersinn entgegen gerichtet. Es tritt Schlupf auf, d. h. es gibt eine Relativbewegung zwischen dem Kontaktpunkt der Rolle und dem Untergrund. Der Fall des reines Rollen kann somit nicht angewendet werden. Die Rolle rollt auf dem Seil ab und das Seil soll stets straff sein. Da das Seil am anderen Ende festgehalten wird,

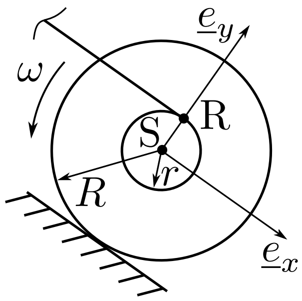


**Abb. 2:** Koordinatensystem zur Anwendung der EULERschen Kinematikgleichungen.

folgt, dass der Abrollpunkt R in Ruhe ist. Dieser Punkt ist somit der Momentanpol, falls sich die Rolle zwischen den Punkten A und B befindet. Mit Hilfe des Koordinatensystem in Abb. ,2 lautet der EULERsche Kinematikgleichung:

$$\underline{v}^{\mathrm{B}} = \underline{0} = \underline{v}^{\mathrm{S}} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{\mathrm{SR}} = v^{\mathrm{S}}\underline{e}_x + \omega\underline{e}_z \times r\underline{e}_y \quad \Rightarrow \quad v^{\mathrm{S}} = \omega r = \frac{1}{2}\omega R \,. \tag{4}$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur dann, wenn sich die Rolle zwischen den Punkten A und B befindet. Die Anwendung für den Punkt B liefert die gesuchte kinematische Beziehung: $v_{\mathrm{B}} = \omega_{\mathrm{B}} R/2$. Substitution dieser Resultats und von Gl. (3) in Gl. (2) liefert eine Bestimmungsgleichung für $\omega_{\mathrm{B}}$:

$$8mgR = \frac{1}{4}mR^2\omega_{\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2}\Theta^{\mathrm{S}}\omega_{\mathrm{B}}^2 + mgh_{\mathrm{B}} + 2mgR \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{24mgR}{mR^2 + 2\Theta^{\mathrm{S}}}} = 4\sqrt{\frac{g}{R}} \,. \tag{5}$$

b) Zunächst wird der Energiesatz zwischen den Punkten B und C aufgestellt:

$$E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{C}}^{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{C}}^{\mathrm{pot}} \quad \Leftrightarrow \quad 8mgR = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2 + \frac{1}{2}\Theta^{\mathrm{S}}\omega_{\mathrm{C}}^2 + mgh_{\mathrm{C}} \,. \tag{6}$$

Für die Höhe des Schwerpunktes im Punkt C gilt $h_{\mathrm{C}} = 3R$. Damit enthält die obige Gleichung die beiden gesuchten Unbekannten $v_{\mathrm{C}}$ und $\omega_{\mathrm{C}}$. Zur Bestimmung von $\omega_{\mathrm{C}}$ kann der Drallsatz genutzt werden.

Die Bewegung zwischen den Punkten B und C ist reibungsfrei. Die beiden in einem Freischnitt einzuzeichnenden Kräfte wären die Gewichts- und die Normalkraft. Die Wirkungslinien dieser Kräfte verlaufen durch den Schwerpunkt S und deshalb wirken keine Momente bezüglich des Schwerpunktes, d. h. es gilt $\sum M^{(\mathrm{S})} = 0$. Der Drallsatz bzgl. des Schwerpunktes S lautet somit:

$$\frac{\mathrm{d}L^{(\mathrm{S})}}{\mathrm{d}t} = \Theta^{\mathrm{S}}\dot{\omega} = \sum M^{(\mathrm{S})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = 0 \,. \tag{7}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist zwischen den Punkten B und C somit konstant. Es gilt also:

$$\omega_{\mathrm{C}} = \omega_{\mathrm{B}} = 4\sqrt{\frac{g}{R}} \,. \tag{8}$$

Die Tatsache, dass die Winkelgeschwindigkeit konstant ist, bedeutet jedoch in diesem Beispiel keineswegs, dass der Momentanpol seine relative Lage zum Schwerpunkt S nicht ändert. Da der Schwerpunkt S beschleunigt oder abgebremst wird, ändert sich somit auch die relative Lage des Momentanpols.

**Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin



Die gesuchte Winkelgeschwindigkeit im Punkt C ist bekannt und kann nun zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Schwerpunkts mit Hilfe des Energiesatzes verwendet werden. Eingesetzt in Gl. (6) erhält man:

$$8mgR = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2 + 8\Theta^{\mathrm{S}}\frac{g}{R} + 3mgR \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{C}} = \sqrt{10gR - \frac{16\Theta^{\mathrm{S}}g}{mR}} = \sqrt{2Rg}\,. \tag{9}$$

c) Nun wird die Bewegung der Rolle unter dem Einfluss der reibungsbehafteten Oberfläche zwischen den Punkten C und D betrachtet. Ziel ist es die Geschwindigkeit des Schwerpunktes un die Winkelgeschwindigkeit im betrachteten Bereich zu bestimmen. Zum Aufstellen der Bewegungs-

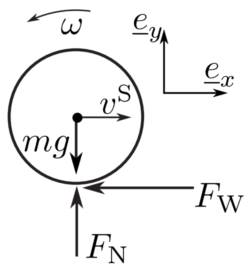


**Abb. 3:** Freischnitt der Rolle zwischen den Punkten C und D.

gleichungen wird der Freischnitt in Abb. 3 betrachtet. Unter Verwendung der Zwangsbedingung $v_y^{\mathrm{S}}(t) = 0$ und des Coulombschen Reibgesetzes ergibt sich der Impulssatz in $\underline{e}_x$-Richtung zu:

$$m\frac{\mathrm{d}v_x^{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum F_x = -F_{\mathrm{W}} = -\mu mg\,. \tag{10}$$

Für den Drallsatz gilt:

$$\Theta^{\mathrm{S}}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum M^{(\mathrm{S})} = -F_{\mathrm{W}}R = -\mu mgR\,. \tag{11}$$

Die Integration der beiden letzten Gleichungen führt auf die gesuchten zeitlichen Verläufe von . Die Integration ist besonders leicht, da die rechten Seiten konstant sind. Aus der Integration von Gl. (10) für $v_x(t)$:

$$\int_{v_{x,0}^{\mathrm{S}}}^{v_x^{\mathrm{S}}(t)} \mathrm{d}v_x^{\mathrm{S}} = \int_0^t \mu g \mathrm{d}\tau \quad \Leftrightarrow \quad v_x^{\mathrm{S}}(t) - v_{\mathrm{C}} = -\mu gt \quad \Leftrightarrow \quad v_x^{\mathrm{S}}(t) = \sqrt{2gR} - \mu gt\,. \tag{12}$$

Mit Gl. (11) folgt analog für die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$:

$$\int_{\omega_0}^{\omega(t)} \mathrm{d}\omega = -\int_0^t \frac{2\mu g}{R}\mathrm{d}\tau \quad \Leftrightarrow \quad \omega(t) - \omega_{\mathrm{C}} = -\frac{2\mu g}{R}t \quad \Leftrightarrow \quad \omega(t) = 4\sqrt{\frac{g}{R}} - 2\frac{\mu g}{R}t\,. \tag{13}$$

Die Bedingung für reines Rollen ist, dass die Relativgeschwindigkeit im Kontaktpunkt verschwindet. Für den vorliegenden Fall heißt dies, dass die Geschwindigkeit der Rolle im Kontaktpunkt K zur Zeit $\hat{t}$ verschwinden muss: $\underline{v}^{\text{text}}(\hat{t}) = \underline{0}$. Mit der Eulerschen Kinematikgleichung für den Kontaktpunkt K

$$\underline{v}^{\mathrm{K}} = \underline{v}^{\mathrm{S}} + \underline{\omega} + \underline{x}^{\mathrm{SK}} = v_x^{\mathrm{S}}\underline{e}_x + \omega\underline{e}_z \times (-R\underline{e}_y) = (v + \omega R)\underline{e}_x \tag{14}$$

ergibt sich die gesuchte Zeit $\hat{t}$, bei der reines Rollen eintritt zu:

$$v_x^{\mathrm{S}}(\hat{t}) = -\omega(\hat{t})R \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2gR} - \mu g t = 2\mu g\hat{t} - 4\sqrt{gR} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{t} = \frac{4+\sqrt{2}}{3\mu}\sqrt{\frac{R}{g}}\,. \tag{15}$$

d) Nun soll der Zeitpunkt der Bewegungsumkehr berechnet werden. Das ist der Zeitpunkt, an dem Schwerpunkt sich in negative $\underline{e}_x$-Richtung bewegt, siehe Abb. 3 für das Koordinatensystem. Es sind zwei Fälle denkbar: die Bewegung könnte sich vor dem Eintreten des reinen Rollens umkehren oder danach. Das heißt im ersten Fall würde nach dem Eintritt des Rollens gelten $v < 0$ und $\omega > 0$. Im zweiten Fall würde die Geschwindigkeit $v^{\mathrm{K}}$ schon vor der Umkehr verschwinden. Das hat zur Folge, dass dann keine Relativbewegung zwischen Rolle und Untergrund herrscht und es auch keine Widerstandskraft gibt. Deshalb würde sich die Rolle einfach nur mit konstanter Geschwindigkeit in positiver $\underline{e}_x$-Richtung bewegen. Sie würde nie wieder den Punkt C erreichen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Rolle ihre translatorische Bewegungsrichtung ändert, bevor das reine Rollen eintritt (1. Fall). Um diesen Fall zu bestätigen, berechnen wir die Zeit, bei der die Geschwindigkeit verschwindet. Die zugehörige Zeit $\tilde{t}$ wird mit Hilfe von Gl. (10) und der Bedingung $v_x^{\mathrm{S}}(\tilde{t}) = 0$:

$$\tilde{t} = \frac{v_{\mathrm{C}}}{\mu g} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2R}{g}}\,. \tag{16}$$

Die folgende Überprüfung Damit die Annahme erfüllt ist, muss die Zeit $t_D$ kleiner sein als die Zeit $\hat{t}$:

$$\tilde{t} < \hat{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2R}{g}} < \frac{4+\sqrt{2}}{3\mu}\sqrt{\frac{R}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} < 2 \tag{17}$$

liefert eine wahre Aussage und somit tritt die Umkehr der Bewegung vor dem reinen Rollen ein. Die obige Annahme ist somit bestätigt. Zur Berechnung der Strecke $s$ wird der Impulssatz in Gl. (10) erneut herangezogen. Trennung der Variablen und Integration ergibt:

$$m\frac{\mathrm{d}v_x^{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v_x^{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{S}}}\frac{\mathrm{d}x^{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} = mv_x^{\mathrm{S}}\frac{\mathrm{d}v_x^{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{S}}} = -\mu m g \quad \Rightarrow \quad \int_{\tilde{v}=v_{\mathrm{C}}}^{\tilde{v}=v_{\mathrm{D}}} \tilde{v}\,\mathrm{d}\tilde{v} = -\int_{\tilde{x}=0}^{\tilde{x}=s} \mu g\,\mathrm{d}x\,. \tag{18}$$

Im Punkt D soll es zu Bewegungsumkehr kommen, d. h. es gilt $v_{\mathrm{D}} = 0$. Somit ergibt sich:

$$-\frac{1}{2}v_{\mathrm{C}}^2 = -\mu g s \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{v_{\mathrm{C}}^2}{2\mu g} = \frac{R}{\mu}\,. \tag{19}$$

**Zusatz:** Zur Bestätigung der Bewegungsumkehr wird die zur Zeit $t = \tilde{t}$ vorliegende Winkelgeschwindigkeit unter Verwendung von Gl. (13) berechnet:

$$\omega(\tilde{t}) = 4\sqrt{\frac{g}{R}} - 2\frac{\mu g}{R}\tilde{t} = 4\sqrt{\frac{g}{R}} - 2\frac{\mu g}{R}\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2R}{g}} = (4-2\sqrt{2})\sqrt{\frac{g}{R}}\,. \tag{20}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist positiv und somit dreht sich die Rolle nach der Bewegungsumkehr weiterhin entgegen des Uhrzeigersinns.

# Hausaufgaben

## 2. Aufgabe

a) Das Seil rollt von der Rolle ab und ist stets gespannt. Der Momentanpol liegt im Abrollpunkt. Das heißt die kinematische Beziehung lautet:

$$\dot{x}^{\mathrm{S}} = \dot{x} = r\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = r\ddot{\varphi}\,. \tag{1}$$

b) Der Freischnitt der Rolle ist Abb. 4 dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass die Gewichtskraft in ihre Komponenten zerlegt worden ist. Die $y$-Koordinate soll senkrecht zur Ebene verlaufen. Der

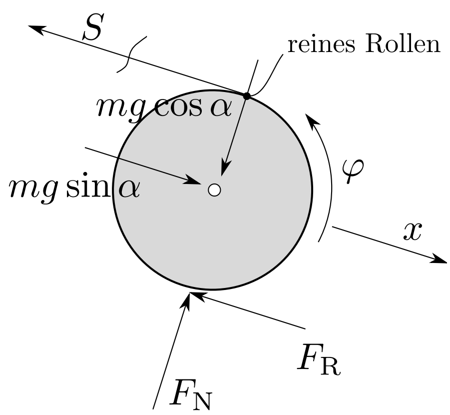


**Abb. 4:** Freischnitt der Rolle.

Schwerpunktsatz für die Rolle lautet komponentenweise:

$$m\ddot{x} = mg\sin(\alpha) - S - F_{\mathrm{W}}\,, \tag{2}$$
$$m\ddot{y} = 0 = -mg\cos(\alpha) + F_{\mathrm{N}} \qquad \Rightarrow \qquad F_{\mathrm{N}} = mg\cos(\alpha)\,. \tag{3}$$

Dabei ist die Zwangsbedingung $\dot{y} = 0$ bereits ausgenutzt worden, um die Normalkraft (Zwangskraft) zu bestimmen. Mit dem Coulombschen Gesetz gilt für die Widerstandskraft:

$$F_{\mathrm{W}} = \mu F_{\mathrm{N}} = \mu mg\cos(\alpha)\ . \tag{4}$$

Einsetzen von Gl. (4) in Gl. (2) liefert die Bewegungsgleichung für die Position des Schwerpunktes:

$$m\ddot{x} = mg\sin(\alpha) - S - \mu mg\cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) - \frac{S}{m}\,. \tag{5}$$

Der Drehimpulssatz bzgl. des Schwerpunktes der Rolle lautet:

$$\varTheta^{(\mathrm{S})}\ddot{\varphi} = Sr - F_{\mathrm{W}}r\,. \tag{6}$$

Mit der kinematischen Beziehung in Gl. (1) sowie dem Coulombschen Gesetz in Gl. (4) folgt:

$$\frac{\varTheta^{(\mathrm{S})}}{r}\ddot{x} = rS - r\mu mg\cos(\alpha)\,. \tag{7}$$

Damit ergibt sich für die Seilkraft:

$$S = \frac{\Theta^{(\mathrm{S})}}{r^2}\ddot{x} + \mu mg\cos(\alpha)\,. \tag{8}$$

Durch Einsetzen von Gl. (8) in Gl. (5) erhält man schließlich die folgende Bewegungsgleichung für die Scherpunktskoordinate:

$$\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) - \frac{\Theta^{\mathrm{S}}}{mr^2}\ddot{x} - \mu g\cos(\alpha) \tag{9}$$

und somit für die Beschleunigung in $x$-Richtung:

$$\ddot{x} = \frac{g(\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha))}{1 + \frac{\Theta^{(\mathrm{S})}}{mr^2}}\,. \tag{10}$$

Für das Massenträgheitsmoment eines Kreiszylinders gilt: $\Theta^{(\mathrm{S})} = \frac{1}{2}mr^2$. Durch Substitution in die obige Gleichung ergibt sich schließlich die folgende Bewegungsgleichung, welche leicht integrierbar ist:

$$\ddot{x}(t) = \frac{g(\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha))}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g(\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha))$$
$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{2}{3}g(\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha))t + v_0\,. \tag{11}$$

c) Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit soll positiv sein. Daraus folgt die Bedingung für den Gleitreibungskoeffizienten:

$$\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu < \frac{1}{2}\tan(\alpha)\,. \tag{12}$$

## 3. Aufgabe

a) Da der betrachtete Körper rotationsymmetrisch ist, werden Zylinderkoordinaten verwendet. In Zylinderkoordinaten gilt für das infinitesimale Volumenelement:

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,. \tag{1}$$

Für den Ortsvektor zum Massenmittelpunkt $\vec{x}^{\mathrm{S}}$ gilt:

$$\vec{x}^{\mathrm{S}} = \frac{\int\limits_{(m)} \underline{x}\,\mathrm{d}m}{\int\limits_{(m)} \mathrm{d}m} = \frac{\rho\int\limits_{(V)} \underline{x}\,\mathrm{d}V}{\rho\int\limits_{(V)} \mathrm{d}V} \qquad ,. \tag{2}$$

Dabei ist im zweiten Schritt das infinitesimale Massenelement mit Hilfe der konstanten Dichte $\rho$ und des Volumenelements $\mathrm{d}V$ ausgedrückt worden.

Unter Ausnutzung der Symmetrie folgt, dass der Schwerpunkt bei $x^{\mathrm{S}} = y^{\mathrm{S}} = 0$ liegt. Er liegt also auf der Symmetrieachse. Für die $z$-Koordinate des Ortsvektors zum Massenmittelpunkt $z_{\mathrm{S}}$

gilt mit $r(z) = \sqrt{z/a}$:

$$z^{\mathrm{S}} = \frac{\int\limits_{(V)} z \, \mathrm{d}V}{\int\limits_{(V)} \mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{h} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{za}} rz \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi}{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{h} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{za}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi} = \frac{\frac{1}{3}\pi a h^3}{\frac{1}{2}\pi a h^2} = \frac{2}{3} h \, . \tag{3}$$

Für den Ortsvektor zum Massenmittelpunkt ergibt sich demnach

$$\underline{x}^{\mathrm{S}} = \frac{2}{3} h \underline{e}_z \; . \tag{4}$$

b) Für das Massenträgheitsmoment bzgl. der $z$-Achse gilt:

$$\Theta_{zz} = \int\limits_{(m)} r^2 \, \mathrm{d}m = \rho \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{h} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{za}} r^3 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6} \rho \pi a^2 h^3 = \frac{1}{3} m a h \, . \tag{5}$$

Dabei ist im letzten Schritt $\rho$ durch die Masse $m$ ersetzt, d. h. $\rho = 2m/(\pi a h^2)$ wurde substituiert. Da die $z$-Koordinate im Integranden nicht auftaucht, ist es offenbar egal, bezüglich welches Punktes auf der $z$-Achse man das Massenträgheitsmoment $\Theta_{zz}$ für die Drehung um die $z$-Achse bestimmt.