**Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin



# Tutoriumsaufgaben

## 1. Aufgabe

Für einen in der ebene bewegten starren Körper lautet der Drallsatz bzgl. des Schwerpunktes S:

$$\Theta^{(\mathrm{S})}\dot{\omega} = \sum M^{(\mathrm{S})} . \tag{1}$$

Diese Form des Drallsatzes wird im Folgenden für beide Körper verwendet. Im Folgenden wird die Rolle stets mit dem Index bzw. Subskript 1 referenziert und die untere Rolle mit dem Subskript 2.

Abbildung 1 zeigt den Freischnitt der oberen Rolle. Für die obere Rolle fallen der Schwerpunkt S

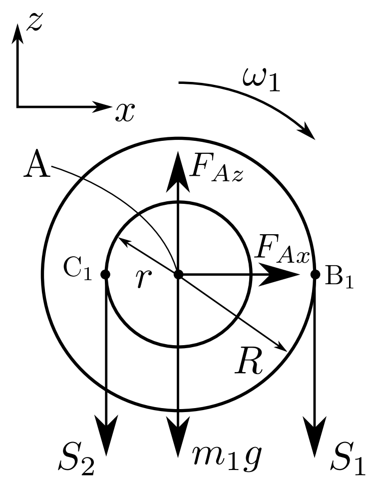


**Abb. 1:** Freischnitt der oberen Rolle.

und der Momentanpol zusammen. Beide Punkte liegen im Lager A. Der Drehimpulssatz bzgl. des Lager A lautet somit:

$$\Theta_1^{(\mathrm{A})}\dot{\omega}_1 = S_1 R - S_2 r . \tag{2}$$

Für die obere Rolle lautet der Schwerpunktsatz, auch zweites Newtonsches Gesetz genannt:

$$m_1\ddot{z}_1 = F_{\mathrm{A}z} - S_1 - S_2 - m_1 g , \qquad m_1\ddot{x}_1 = F_{\mathrm{A}x} . \tag{3}$$

Abbildung 1 zeigt den Freischnitt der unteren Rolle. Da sich die Schwerpunkt S vertikal bewegen kann, kann die Lage des Momentanpols nicht direkt bestimmt werden. Es wird der Drehimpuls- bzw. Drallsatz bzgl. des Schwerpunktes S aufgestellt:

$$\Theta_2^{\mathrm{S}}\dot{\omega}_2 = S_2 r_2 - S_1 r_2 = S_2 \frac{r+R}{2} - S_1 \frac{r+R}{2} . \tag{4}$$

Dabei ist im zweiten Schritt die geometrische Beziehung $r_2 = (r+R)/2$ verwendet worden, welche sich aus der Tatsache folgt, dass der Durchmesser der unteren Rolle gleich dem Abstand der Abrollpunkte des Seils auf der oberen Rolle ist. Der Schwerpunktsatz liefert für die Komponentengleichungen:

$$m_2\ddot{x}_2 = F_{\mathrm{S}} , \qquad m_2\ddot{z}_2 = S_1 + S_2 - m_2 g . \tag{5}$$

Die vorliegenden sechs Gleichungen (2)-(5) beinhalten die elf Unbekannten: $S_1$, $S_2$, $F_{\mathrm{S}}$, $F_{\mathrm{A}x}$, $F_{\mathrm{A}z}$,

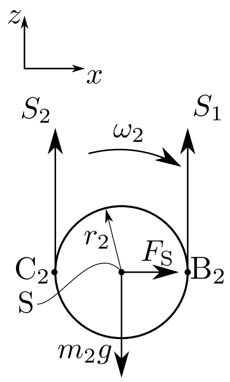


**Abb. 2:** Freischnitt der unteren Rolle.

$\ddot{x}_1$, $\ddot{z}_1$, $\dot{\omega}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{z}_2$ und $\dot{\omega}_2$. Es sind somit fünf zusätzliche Bedingungen nötig. Das sind zu einem Zwangsbedingung und zum anderen kinematische Kopplungsbedingungen.

Der Schwerpunkt der oberen Scheibe ist fest gelagert und verschwindet der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor dort. Der Schwerpunkt der unteren Scheibe ist mit einem Loslager fixiert. Das heißt die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in $x$-Richtung verschwinden dort. Zusammengefasst gilt somit:

$$\ddot{x}_1 = 0\,, \qquad \ddot{z}_1 = 0\,, \qquad \ddot{x}_2 = 0\,. \tag{6}$$

Damit lassen sich die Lagerreaktionen mit den entsprechenden Komponenten der Impulssätze berechnen. Es gilt:

$$F_{Ax} = 0\,, \qquad F_{Az} = S_1 + S_2 + m_1 g\,, \qquad F_S = 0\,. \tag{7}$$

Für die kinematischen Kopplungsbedingungen wird die EULERsche Kinematikgleichung herangezogen. Ziel ist es alle verbliebenen kinematischen Größen durch die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $v_2^S$ der unteren Scheibe auszudrücken. Dazu werden die Geschwindigkeiten der Abrollpunkte des Riemens auf der oberen Scheibe mit Hilfe der EULERschen Kinematikgleichung aufgestellt. Diese Punkte sind mit in Abb. 1 mit den Symbolen $B_1$ und $C_1$ bezeichnet. Die entsprechenden EULERschen Kinematikgleichungen lauten:

$$\underline{v}^{B_1} = \underline{v}^S + \underline{\omega}_1 \times \underline{x}^{SB_1} = \underline{0} + \omega_1 \underline{e}_y \times R\underline{e}_x = -R\omega_1 \underline{e}_z\,, \tag{8}$$
$$\underline{v}^{C_1} = \underline{v}^S + \underline{\omega}_1 \times \underline{x}^{SC_1} = \underline{0} + \omega_1 \underline{e}_y \times (-r\underline{e}_x) = r\omega_1 \underline{e}_z\,. \tag{9}$$

An der unteren Riemenscheibe erhält für die Geschwindigkeiten der korrespondierenden Abrollpunkte in Abhängigkeit von den Bewegungsgrößen:

$$\underline{v}^{B_2} = \underline{v}^S + \underline{\omega}_1 \times \underline{x}^{SB_2} = \underline{v}^S + \omega_2 \underline{e}_y \times r_2 \underline{e}_x = (v_2^S - r_2\omega_2)\underline{e}_z\,, \tag{10}$$
$$\underline{v}^{C_2} = \underline{v}^S + \underline{\omega}_1 \times \underline{x}^{SC_2} = \underline{v}^S + \omega_2 \underline{e}_y \times (-r_2 \underline{e}_x) = (v_2^S + r_2\omega_2)\underline{e}_z\,, \tag{11}$$

wobei $r_2 = (r+R)/2$ ist. Der Riemen soll stets straff sein. In diesem Fall gilt: $\underline{v}^{B_1} = \underline{v}^{B_2}$ und $\underline{v}^{C_1} = \underline{v}^{C_2}$. Die Komponentengleichung, welche die Kopplung beschreiben, lauten somit:

$$-R\omega_1 = v_2^S - \frac{r+R}{2}\omega_2\,, \qquad r\omega_1 = v_2^S + \frac{r+R}{2}\omega_2\,. \tag{12}$$

Algebraische Umformungen bspw. durch geeignete Addition und Subtraktion der beiden obigen

**Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin



Gleichungen liefert die gesuchten kinematischen Abhängigkeiten:

$$\omega_1 = \frac{2}{r-R}v_2^{\mathrm{S}} = \frac{2}{r-R}\ddot{z}_2\,, \qquad \omega_2 = \frac{2}{r-R}v_2^{\mathrm{S}} = \frac{2}{r-R}\ddot{z}_2\,. \tag{13}$$

Damit können die verbleibenden Bewegungsgleichungen, das sind Gl. (2), (4) und $(5)_2$, weiter reduziert werden. Gleichung $(5)_2$ wird nach der Kraft $S_1$ aufgelöst:

$$S_1 = m_2\dot{v}_{\mathrm{S}} - S_2 + m_2 g\,.$$

Eingesetzt in Gl. (2) und (**??**) ergibt sich:

$$\Theta_1^{\mathrm{A}}\dot{\omega}_1 = (m_2\dot{v}_2^{\mathrm{S}} - S_2 + m_2 g)R - S_2 r\,, \qquad \Theta_2^{\mathrm{A}}\dot{\omega}_2 = S_2\frac{r+R}{2} - (m_2\dot{v}_2^{\mathrm{S}} - S_2 + m_2 g)\frac{r+R}{2}\,. \tag{14}$$

Durch Addition beider Gleichungen kann der Kraft $S_2$ eliminiert werden. Es gilt:

$$\Theta_1^{\mathrm{A}}\dot{\omega}_1 + \Theta_2^{\mathrm{S}}\dot{\omega}_2 = \left(m_2\dot{v}_2^{\mathrm{S}} + mg\right)\left(R - \frac{r+R}{2}\right)\,. \tag{15}$$

Durch Substitution gemäß Gl. (13) ergibt sich die gesucht Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S:

$$\left(\Theta_1^{\mathrm{A}} + \Theta_2^{\mathrm{S}}\right)\frac{2}{r-R}\dot{v}_{\mathrm{S}} = m_2 g\frac{R-r}{2} + m_2\frac{R-r}{2}\dot{v}_2^{\mathrm{S}}$$
$$\Rightarrow \quad \dot{v}_2^{\mathrm{S}} = -\frac{m_2}{\Theta_1^{\mathrm{A}} + \Theta_2^{\mathrm{S}} + m_2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 g\,. \tag{16}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich durch einfache Integration in der Zeit:

$$v^{\mathrm{S}}(t) = \frac{m_2}{\Theta_1^{\mathrm{A}} + \Theta_2^{\mathrm{S}} + m_2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 gt + v_0^{\mathrm{s}}\,, \tag{17}$$

wobei $v_0^{\mathrm{s}}$ die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts ist.

## 2. Aufgabe

a) Zunächst soll der Drehimpuls des Systems bzgl. des Punktes A vor der Blockierung berechnet werden. Dazu wird die integrale Definition des Drehimpulses verwendet. Für den Drehimpuls gilt im Allgemeinen die folgende integrale Beziehung:

$$\underline{L}^{(\mathrm{A})} = \int_M \underline{x}^{\mathrm{AP}} \times \underline{v}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}m = \int\limits_M \left(\underline{x}^{\mathrm{AB}} + \underline{x}^{\mathrm{BP}}\right) \times \underline{v}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}m = \underline{x}^{\mathrm{AB}} \times \int\limits_M \underline{v}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}m + \int\limits_M \underline{x}^{\mathrm{BP}} \times \underline{v}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}m\,, \tag{1}$$

wobei die Punkte A und B beliebig sind und die additive Zerlegung des Vektor $\underline{x}^{\mathrm{AP}}$ verwendet wurde. Das erste verbleibende Integral auf der rechte Seite kann mit der Definition des Schwerpunkts als Produkt der Masse und der Schwerpunktgeschwindigkeit geschrieben werden. Für das zweite Integral wird die Eulersche Kinematikgleichung zwischen Punkten B und P verwendet:

**Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin



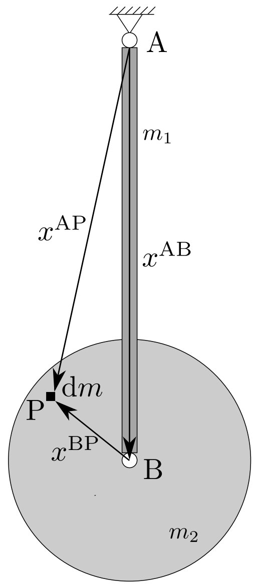


**Abb. 3:** Additive Zerlegung des Ortsvektors zum Punkt P.

$\underline{v}^{\mathrm{P}} = \underline{v}^{\mathrm{B}} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{\mathrm{BP}}$. Es ergibt sich somit:

$$
\begin{aligned}
\underline{L}^{(\mathrm{A})} &= \underline{x}^{\mathrm{AB}} \times M \underline{v}^{\mathrm{S}} + \int\limits_M \underline{x}^{\mathrm{BP}} \times \left(\underline{v}^{\mathrm{B}} + \underline{\omega} \times \underline{x}^{\mathrm{BP}}\right) \,\mathrm{d}m \\
&= \underline{x}^{\mathrm{AB}} \times M \underline{v}^{\mathrm{S}} + \int\limits_M \underline{x}^{\mathrm{BP}} \times \underline{v}^{\mathrm{B}} \,\mathrm{d}m + \int\limits_M \underline{x}^{\mathrm{BP}} \times \underline{\omega} \times \underline{x}^{\mathrm{BP}} \,\mathrm{d}m \\
&= \underline{x}^{\mathrm{AB}} \times M \underline{v}^{\mathrm{S}} + \int\limits_M \left(\underline{x}^{\mathrm{P}} - \underline{x}^{\mathrm{B}}\right) \,\mathrm{d}m \times \underline{v}^{\mathrm{B}} + \int\limits_M \underline{x}^{\mathrm{BP}} \times \underline{\omega} \times \underline{x}^{\mathrm{BP}} \,\mathrm{d}m \\
&= \underline{x}^{\mathrm{AB}} M \times \underline{v}^{\mathrm{S}} + M \left(\underline{x}^{\mathrm{S}} - \underline{x}^{\mathrm{B}}\right) \times \underline{v}^{\mathrm{B}} + \underline{\underline{\Theta}}^{(\mathrm{B})} \cdot \underline{\omega}\,. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Dabei ist anzumerken, dass die obige Formel für die Transformation des Drallvektors allgemein gültig ist. Besonders einfach wird sie, falls der Punkt B gleich dem Schwerpunkt S oder gleich dem Momentanpol ist. Im ersten Fall gilt $\underline{x}^{\mathrm{B}} = \underline{x}^{\mathrm{S}}$ und damit verschwindet der mittlere Term. Im zweiten Fall gilt $\underline{v}^{\mathrm{B}} = \underline{0}$ und der mittlere Term verschwindet ebenfalls. Als weitere Spezialisierung der obigen Transformationsformel kann der Fall eines ruhenden Schwerpunktes betrachtet werden. In diesem Fall gilt $\underline{v}^{\mathrm{S}} = \underline{0}$ und der erste Term verschwindet.

Die Punkte A und B werden nun wie Abb. 3 dargestellt gewählt. Vor dem Stoß bewegt sich die Stange nicht. Das heißt der Punkt B ruht und der Momentanpol der unteren liegt somit im Punkt B. Die untere Rolle dreht sich vor dem Stoß mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_2$. Die Anwendung der oberen Formel für diesen Fall für beide Körper mit $\underline{v}_1^{\mathrm{S}} = \underline{v}_2^{\mathrm{S}} = \underline{0}$, $\underline{v}^{\mathrm{B}} = \underline{0}$, $\underline{x}_2^{\mathrm{S}} = \underline{x}^{\mathrm{B}}$ liefert:

$$
\underline{L}^{(\mathrm{A})} = \underline{L}_1^{(\mathrm{A})} + \underline{L}_2^{(\mathrm{A})} = \underline{\underline{\Theta}}_2^{(\mathrm{B})} \cdot \underline{\omega}_2 = \underline{\underline{\Theta}}_2^{(\mathrm{S})} \cdot \underline{\omega}_2\,. \qquad (3)
$$

Es wird im Folgenden aufgrund der ebenen Bewegung nur die Komponente des Drallvektors außerhalb der Zeichenebene betrachtet. Das heißt es gilt:

$$
L^{(\mathrm{A})} = \Theta_2^{(\mathrm{S})} \omega_2 \qquad (4)
$$

Das in der obigen Gleichung auftretende Massenträgheitsmoment ist das Massenträgheitsmoment des 2. Körpers bzgl. des Schwerpunktes.

b) Der Vorgang des Blockierens geschieht in Analogie zu einem plastischen Kraftstoß, nur dass hier ein Moment derart greift, dass beide Körper nach dem Stoß ein zusammenhängender starrer Körper sind (plastischer Stoß). Ein möglicher Blockiermechanismus ist Abb. 4 gezeigt. Die Bewegung und die Masse des Bolzens sollen im Folgenden vernachlässigt werden. Nach dem Stoß

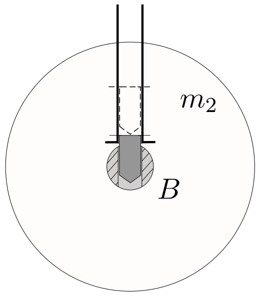


**Abb. 4:** Möglicher Blockiermechanismus in Analogie zum plastischen Stoß.

gilt für den Drall des zusammenhängenden starren Körpers zu:

$$L_{\text{nach}}^{(A)} = \Theta_{\text{ges.}}^{(A)} \omega \,. \tag{5}$$

Auf das System wirkt kein äußeres Moment und bleibt der Drehimpulses des System erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}L^{(A)}}{\mathrm{d}t} = M^{(A)} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{\text{nach}}^{(A)} = L_{\text{vor}}^{(A)} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\Theta_2^{(S)}}{\Theta_{\text{ges.}}^{(A)}} \omega_2 \,. \tag{6}$$

Zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß ist also das Massenträgheitsmoment des zusammenhängenden Körpers nötig. Das gesamte Massenträgheitsmoment lässt sich durch die Addition der Massenträgheitsmomente der Einzelkörper berechnen. Es gilt

Das Massenträgheitsmoment beider Massen um den Punkt A, $\Theta_{\text{Ges}}^{(A)}$, bestimmt man über den Satz von Steiner:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{ges.}}^{(A)} = \Theta_1^{(A)} + \Theta_2^{(A)} &= \Theta_1^{(S)} + m_1 \left(\tfrac{3}{2} r\right)^2 + \Theta_2^{(S)} + m_2 \,(3r)^2 \\ &= \Theta_1^{(S)} + \Theta_2^{(S)} + 9 \left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) r^2 \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit folgt für die Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß:

$$\omega = \frac{\Theta_2^{(S)} \omega_2}{\Theta_1^{(S)} + \Theta_2^{(S)} + 9\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) r^2} \,. \tag{8}$$

c) Nun wird der Energiesatz zwischen dem Zustand nach dem Stoß bzw. der Blockierung (Zeitpunkt $t_1$) und dem Zustand der maximalen Auslenkung (Zeitpunkt $t_2$) angewendet. Die Arbeit der dissipativen Kräfte ist im betrachteten Intervall null, da der plastische Stoß, bei dem Dissipation auftritt, nicht im betrachteten Intervall stattfindet. Es gilt:

$$E^{\text{kin}}(t_1) + E^{\text{pot}}(t_1) = E^{\text{kin}}(t_2) + E^{\text{pot}}(t_2) \,. \tag{9}$$

**Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin



Die kinetische Energien unmittelbar nach der Blockierung ($t_1$) und im Zustand der maximalen Auslenkung ($t_2$) sind gegeben durch:

$$E^{\text{kin}}(t_1) = \frac{1}{2}\Theta^{(\text{A})}_{\text{ges.}}\omega^2\,, \qquad E^{\text{kin}}(t_2) = 0\,. \tag{10}$$

Der translatorische Anteil der kinetischen Energie muss nicht berücksichtigt werden, da der Punkt A der Momentanpol ist. Es gibt nun zwei Arten die potentiellen Energien zu bestimmen. Das Potential der Gravitationsfeldes ist linear bzgl. der Masse. Das heißt die potentielle Energieänderung beider Körper kann entweder einzeln betrachtet werden oder das System wird als ein zusammenhängender Körper aufgefasst und dessen Schwerpunkt wird bestimmt.

Die separate Betrachtung der Massen liefert mit Hilfe von Abb. 5:

$$E^{\text{pot}}(\varphi) = E^{\text{pot}}_1(\varphi) + E^{\text{pot}}_2(\varphi) = \frac{3}{2}m_1 gr(1-\cos(\varphi)) + 3m_2 gr(1-\cos(\varphi))\,, \tag{11}$$

wobei das Nullniveau der potentiellen Energie im Punkt A liegt, d. h. $E^{\text{pot}}(\varphi = 0) = 0$.

Um die potentielle Energie des zusammenhängenden Körpers zu bestimmen, wird der die $y$-Koordinate des Schwerpunkt S wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} y^{\text{S}}(\varphi) &= \frac{1}{m_1+m_2}\Big(m_1 y^{\text{S}}_1(\varphi) + m_2 y^{\text{S}}_2(\varphi)\Big) = \frac{1}{m_1+m_2}\Big(m_1 y^{\text{S}}_1(\varphi) + m_2 y^{\text{S}}_2(\varphi)\Big) \\ &= \frac{1}{m_1+m_2}\Big(\tfrac{3}{2}m_1 r\cos(\varphi) + 3m_2 r\cos(\varphi)\Big) = \frac{3m_1+6m_2}{2(m_1+m_2)}r\cos(\varphi)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Somit gilt für die potentielle Energie:

$$E^{\text{pot}}(\varphi) = (m_1+m_2)g\Big(y^{\text{S}}(\varphi) - y^{\text{S}}(0)\Big) = 3\frac{m_1+2m_2}{2}gr(1-\cos(\varphi))\,, \tag{13}$$

welches äquivalent zu der oben bereits berechneten Energie ist.

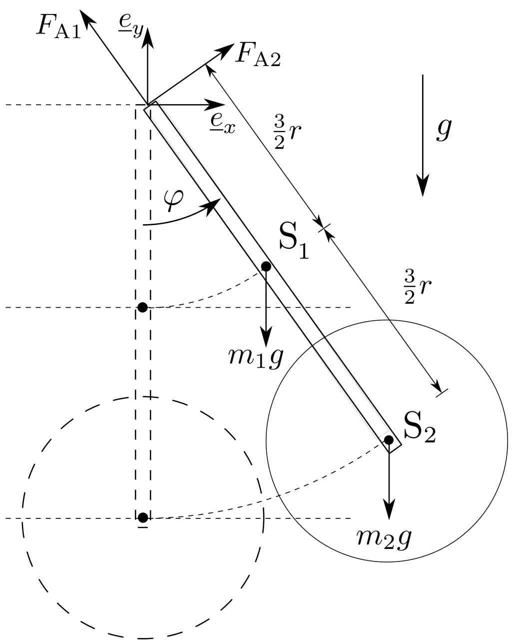


**Abb. 5:** Freischnitt am ausgelenktem System zur Bestimmung von $E^{\text{pot}}$.

Damit lässt aus dem Energiesatz mit $E^{\text{pot}}(t_1) = E^{\text{pot}}(0)$ und $E^{\text{pot}}(t_2) = E^{\text{pot}}(\varphi_{\text{max.}})$ die maximale Auslenkung $\varphi_{\text{max.}}$ wie folgt berechnen:

$$E^{\text{kin}}(t_1) = E^{\text{pot}}(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\Theta^{(A)}_{\text{ges}}\omega^2 = 3\frac{m_1 + 2m_2}{2} gr(1 - \cos(\varphi_{\text{max.}}))$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{\text{max.}} = \arccos\left(1 - \frac{\Theta^{(A)}_{\text{ges.}}\omega^2}{3(m_1 + 2m_2)gr}\right) . \tag{14}$$

Durch Substitution von Gl. (7) und (8) ergibt sich schließlich:

$$\varphi_{\text{max.}} = \arccos\left(1 - \frac{\Theta^{(A)}_2\omega_2^2}{3(m_1 + 2m_2)gr}\right) . \tag{15}$$

**Ab hier beginnt die Lösung der Hausaufgabe.**

d) Der Arbeitssatz zwischen dem Zustand vor (Zeitpunkt: $t_0$) und dem Zustand unmittelbar nach der Blockierung (Zeitpunkt $t_1$) lautet:

$$E^{\text{kin}}(t_0) + E^{\text{pot}}(t_0) + W^{\text{diss.}}_{12} = E^{\text{kin}}(t_1) + E^{\text{pot}}(t_1) , \tag{16}$$

wobei mit $W^{\text{diss.}}_{12}$ die Arbeit der dissipativen Kräfte gemeint ist. Die Energien sind gegeben durch:

$$E^{\text{kin}}(t_0) = \frac{1}{2}\Theta^{(S)}_2\omega_2^2 , \qquad E^{\text{kin}}(t_1) = \frac{1}{2}\Theta^{(A)}_{\text{ges.}}\omega_1^2 , \qquad E^{\text{pot}}(t_0) = E^{\text{pot}}(t_1) = 0 . \tag{17}$$

Somit ist die Arbeit der dissipativen Kräfte gegeben durch die Differenz der kinetischen Energien:

$$W_{12} = \frac{1}{2}\Theta^{(A)}_{\text{ges.}}\omega^2 - \frac{1}{2}\Theta^{(A)}_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta^{(S)}_2{}^2}{\Theta^{(A)}_{\text{ges.}}} - \Theta^{(S)}_2\right)\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta^{(S)}_2}{\Theta^{(A)}_{\text{ges.}}} - 1\right)\Theta^{(S)}_2\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta^{(S)}_2}{\Theta^{(S)}_1 + \Theta^{(S)}_2 + 9\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)r^2} - 1\right)\Theta^{(S)}_2\omega_2^2 < 0 . \tag{18}$$

Die Arbeit ist negativ. Es wird also Energie dissipiert.

**Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller**
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin



## Hausaufgaben

### 3. Aufgabe

Arbeitssatz:

$$E_1^{\rm kin} + E_1^{\rm pot} - E_0^{\rm kin} - E_0^{\rm pot} = W \ . \tag{1}$$

Kin. und pot. Energie am Anfang:
Das Nullniveau wird auf Höhe des Mittelpunkts des Rades gelegt. Die Bewegung startet aus der Ruhe.

$$E_0^{\rm kin} = 0\,, \qquad E_0^{\rm pot} = m_1 g y_0^{\rm S}\,, \tag{2}$$

wobei für die Lage des Schwerpunkts der Stange zu Beginn, $y_0^{\rm S}$, gilt:

$$y_0^{\rm S} = \frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}L\,. \tag{3}$$

Kin. und pot. Energie am Ende:
Die Stange ist am Ende waagerecht.

$$E_1^{\rm kin} = \frac{1}{2}m_1 {v_1^{\rm S}}^2 + \frac{1}{2}\Theta_1^{\rm S}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_1^{\rm B}}^2 + \frac{1}{2}\Theta_2^{\rm B}\dot{\psi}_1^2\,, \qquad E_1^{\rm pot} = 0\,. \tag{4}$$

Arbeit des Reibmoments:
Wie auch aus der Skizze in dem gegebenen Koordinatensystem zu sehen, ist die Lage der Stange mit $+\varphi$ und die Lage des Rads $-\psi$ gekennzeichnet.

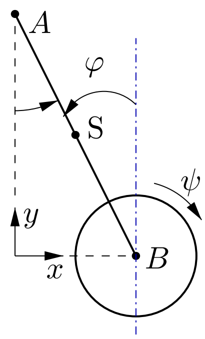


**Abb. 6**

Die relative Bewegung der beiden Körper

$$\gamma(t) = (-\psi(t)) - (+\varphi(t)) \tag{5}$$

wird im Gelenk vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt 1 die Reibungsarbeit hervorrufen:

$$W = \int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)} M_{\rm R}{\rm d}\gamma = M_{\rm R}(\gamma(t_1) - \gamma(t_0)) = M_{\rm R}(\gamma_1 - \gamma_0) = M_{\rm R}(-\varphi_1 - \psi_1 + \varphi_0 + \psi_0)\,. \tag{6}$$

<u>Kinematik</u>:
Für die verschiedenen Bewegungsgrößen aus der kinetischen Energie (Gl. (4)) müssen kinematische Beziehungen gefunden werden. Dafür werden die Ortsvektoren der Punkte $A$ und $B$ und damit $S$ aufgestellt:

$$x^{\mathrm{A}} = 0\,, \qquad y^{\mathrm{A}} = L\cos(\varphi)\,, \qquad x^{\mathrm{B}} = L\sin(\varphi)\,, \qquad y^{\mathrm{B}} = 0\,. \tag{7}$$

Daraus folgt für die Koordinate des Schwerpunktes S:

$$x^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}(x^{\mathrm{A}} + x^{\mathrm{B}}) = \frac{L}{2}\sin(\varphi)\,, \qquad y^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}(y^{\mathrm{A}} + y^{\mathrm{B}}) = \frac{L}{2}\cos(\varphi)\,. \tag{8}$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}^{\mathrm{S}} = \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos(\varphi) = v^{\mathrm{S}}_x\,, \qquad \dot{y}^{\mathrm{S}} = -\frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin(\varphi) = v^{\mathrm{S}}_y \quad \Rightarrow \quad v^{\mathrm{S}} = \sqrt{(\dot{x}^{\mathrm{S}})^2 + (\dot{y}^{\mathrm{S}})^2} = \frac{L}{2}\dot{\varphi}\,, \tag{9}$$

$$v^{\mathrm{B}} = \sqrt{(\dot{x}^{\mathrm{B}})^2 + (\dot{y}^{\mathrm{B}})^2} = \dot{x}_B = L\dot{\varphi}\cos(\varphi)\,, \qquad v^{\mathrm{A}} = \left|\dot{y}^{\mathrm{A}}\right| = L\dot{\varphi}\sin(\varphi)\,. \tag{10}$$

Zwischen dem Winkel $\varphi$ und dem Winkel $\psi$ lässt sich mit der Bedingung des reinen Rollens des Rades auf der Ebene folgender Zusammenhang finden:

$$r\dot{\psi} = v^B \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{v^B}{r} = \frac{L}{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{L}{r}\sin(\varphi)\,, \tag{11}$$

da $\psi = 0$ gelten soll falls $\varphi = 0$ ist. Mit den Anfangswerten ergibt sich:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,, \tag{12}$$

$$\psi_0 = \frac{L}{r}\sin(\varphi)_0 = \frac{1}{2}\frac{L}{r},. \tag{13}$$

Werte am Ende:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad v^{\mathrm{A}}_1 = |L\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1)| = L\dot{\varphi}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{L}v^{\mathrm{A}}_1\,, \quad \Rightarrow \quad v^{\mathrm{S}}_1 = \frac{L}{2}\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2}v^{\mathrm{A}}_1\,. \tag{14}$$

$$v^{\mathrm{B}} = L\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1) = 0\,, \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}_1 = \frac{L}{r}\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = \frac{L}{r}\sin(\varphi_1) = \frac{L}{r}\,. \tag{15}$$

Alles eingesetzt in Gl. (1) liefert:

$$\frac{1}{2}m_1\frac{1}{4}(v^{\mathrm{A}}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m_1L^2\frac{1}{L^2}(v^{\mathrm{A}}_1)^2 - m_1gL\frac{\sqrt{3}}{4} = M_{\mathrm{R}}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{L}{r} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\frac{L}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v^{\mathrm{A}}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}gL - \frac{M_{\mathrm{R}}}{m_1}\left(2\pi + 3\frac{L}{r}\right)}\,. \tag{16}$$