Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

a) Gesucht ist die Eigenfrequenz des Systems und die Amplitude der Schwingung.

Zur Berechnung dieser beiden Größen wird die Schwingungsdifferentialgleichung benötigt. Das System hat einen Freiheitsgrad, kann also durch eine Koordinate eindeutig beschrieben werden. Hier wird der Auslenkungswinkel φ als Koordinate gewählt. Die Schwingungs-DGL folgt aus dem *Freischnitt im ausgelenkten Zustand* (Abb. 1) und der Anwendung des Drallsatzes:

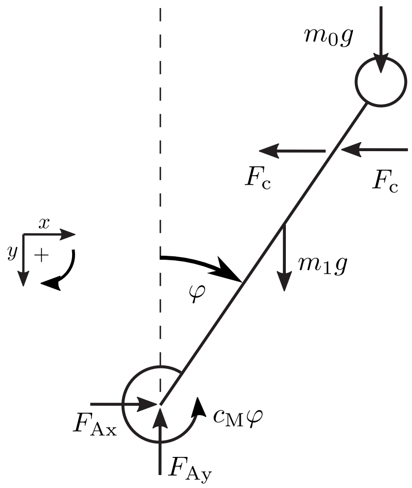

Abb. 1: Freischnitt des ausgelenkten Pendels

Der Drallsatz lautet:

$$\sum M^{(A)} = \Theta^{(A)}\ddot{\varphi} = -c_M\varphi - 2(c_F\ell\sin(\varphi))(\ell\cos\varphi) + (m_1 g\frac{L}{2} + m_0 gL)\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow 0 = \ddot{\varphi} + \frac{c_M}{\Theta^{(A)}}\varphi + \frac{2c_F\ell^2}{\Theta^{(A)}}\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \frac{(m_1 g\frac{L}{2} + m_0 gL)}{\Theta^{(A)}}\sin(\varphi)\ . \quad (1)$$

Mit dem Satz von Steiner folgt zudem für das Massenträgheitsmoment des Systems bzgl. des Punktes A:

$$\Theta^{(A)} = \Theta_1^{(S)} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2\ . \quad (2)$$

Der erste Term ist das Massenträgheitsmoment $\Theta_1^{(S)}$ des Stabes, der zweite Term der zugehörige Steiner-Anteil und der dritte Term das Massenträgheitsmoment der Punktmasse.

Gleichung (1) ist eine nichtlineare DGL in φ, da die sin- und cos-Funktion nichtlinear sind. Man kann solch eine DGL mittels einer Taylorentwicklung linearisieren indem Summanden höherer Potenzen als vergleichsweise klein abgeschätzt werden und daher zu vernachlässigen sind. Wir erhalten aus der Taylorentwicklung einer Funktion $f(x)$ um $x = x_0$ für kleine x:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + f''(x_0)\frac{x^2}{2!} + \dots\ , \qquad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x\ .$$

Die angenäherte Funktion ist eine lineare Funktion in x. Deshalb spricht man von Linearisierung.

In der Aufgabenstellung heißt es „kleine Schwingungen“, gemeint ist also eine Linearisierung um den bestimmten Winkel $\varphi < 0{,}1 \approx 5°$ bzw. $\varphi_0 = 0$:

$$\sin\varphi \approx \sin\varphi_0 + \cos\varphi_0 \cdot \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sin(\varphi) \approx \varphi}\ ,$$
$$\cos\varphi \approx \cos\varphi_0 - \sin\varphi_0 \cdot \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\cos(\varphi) \approx 1}\ ,$$
$$\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) \approx \sin\varphi_0\cos\varphi_0 + \left(\cos^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_0\right)\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) \approx \varphi}\ .$$

Setzt man diese Vereinfachungen in Gl. (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot\varphi + \frac{c_\mathrm{M}}{\Theta^{(\mathrm{A})}}\varphi + \frac{2c_\mathrm{F}\ell^2}{\Theta^{(\mathrm{A})}}\varphi - \frac{(m_1 g\frac{L}{2} + m_0 g L)}{\Theta^{(\mathrm{A})}}\varphi \\ &= \ddot\varphi + \left(\frac{c_\mathrm{M} + 2c_\mathrm{F}\ell^2 - (m_1 g\frac{L}{2} + m_0 g L)}{\Theta^{(\mathrm{A})}}\right)\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man nun Gl. (2), sowie m_0, m_1, c_F und c_M aus der Aufgabenstellung in die linearisierte Schwingungs-DGL, d. h. in Gl. (3), ein, erhält man die Lösung für die Eigenkreisfrequenz ω_0. Im Gegensatz zur Eigenfrequenz ν gibt die Eigenkreisfrequenz nicht die Anzahl der Schwingungsperioden bezogen auf eine Zeitspanne an, sondern den überstrichenen Phasenwinkel der Schwingung pro Zeitspanne. Da eine Schwingungsperiode einem Phasenwinkel von 2π entspricht, unterscheidet sich die Eigenkreisfrequenz von der Eigenfrequenz durch einen Faktor 2π. Es gilt:

$$0 = \ddot\varphi + \underbrace{\frac{3}{8}\frac{g}{L}\left(4\frac{\ell^2}{L^2} - 1\right)}_{\omega_0^2}\varphi\ , \tag{4}$$

$$\underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{g}{L}\left(4\frac{\ell^2}{L^2} - 1\right)}}} \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{8}\frac{g}{L}\left(4\frac{\ell^2}{L^2} - 1\right)}\ . \tag{5}$$

Um die Schwingungsamplitude zu bestimmen, ist es notwendig, die Schwingungs-DGL (4) zu lösen. Allgemein lässt sich diese DGL durch eine Linearkombination trigonometrischer Funktionen lösen. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\ . \tag{6}$$

Die allgemeine Lösung ist dabei noch an den gegebenen Fall anzupassen. Dies geschieht, in dem man die zeitunabhängigen Konstanten A und B mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die Anfangsbedingungen sind in der Aufgabenstellung gegeben und stellen die Werte der untersuchten Funktion (hier $\varphi(t)$) oder deren Ableitung zum Beginn der Beobachtung dar. Es gilt:

$$\varphi(t=0) = 0\ , \qquad \dot\varphi(t=0) = \frac{v_0}{L} \qquad \Rightarrow \qquad A = 0\ , \qquad B = \frac{v_0}{\omega_0 L}\ . \tag{7}$$

Setzt man Konstanten in die allgemeine Lösung ein, erhält man die spezielle Lösung und damit auch die gesuchte Schwingungsamplitude $\widehat{\varphi}$ als:

$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{v_0}{\omega_0 L}}_{=\widehat{\varphi}}\sin(\omega_0 t)\ , \qquad \widehat{\varphi} = \underline{\underline{\frac{v_0}{\omega_0 L}}}\ . \tag{8}$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2. Aufgabe

a)

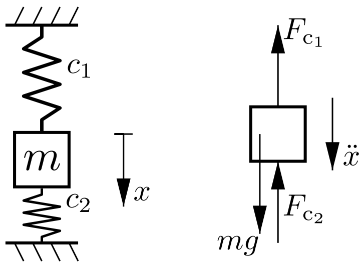

Abb. 2: Freischnitt des Systems a)

$$F_{c_1} = c_1 x \ , \quad F_{c_2} = c_2 x \ .$$

Schwerpunktsatz nach Freischnitt in Abb. 2:

$$\sum F_x \overset{!}{=} m\ddot{x} = mg - F_{c_1} - F_{c_2} = mg - (c_1 + c_2)x$$

$$\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{m} x = g \qquad \text{Schwingungs-DGL}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} \qquad \text{Eigenkreisfrequenz}$$

Merke: Parallelschaltung der Federn $\Rightarrow$ Addition der Steifigkeiten.

b)

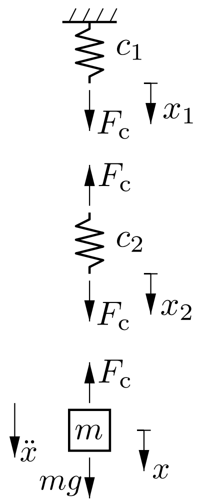

Abb. 3: Freischnitt des Systems b)

x_1 und x_2 sind die Veränderungen der Federlänge gegenüber dem entspannten Zustand, x ist die Auslenkung der Masse m:

$$
\begin{aligned}
& x = x_1 + x_2 \ , \\
& F_c = c_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_c}{c_1} = x_1 \ , \ F_c = c_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_c}{c_2} = x_2 \\
\Rightarrow \quad & x = x_1 + x_2 = \frac{F_c}{c_1} + \frac{F_c}{c_2} \quad \Rightarrow \quad F_c = cx \quad \text{mit } \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \ .
\end{aligned}
$$

Schwerpunktsatz nach Freischnitt in Abb. 3:

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x} = mg - F_c = mg - cx \\
\Rightarrow \quad & \ddot{x} + \frac{c}{m} x = g \\
\Rightarrow \quad & \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}} \ .
\end{aligned}
$$

Merke: Reihenschaltung von Federn $\Rightarrow$ Addition der Nachgiebigkeiten (=inversen Steifigkeiten).

c) *Beachte*: Reines Rollen!

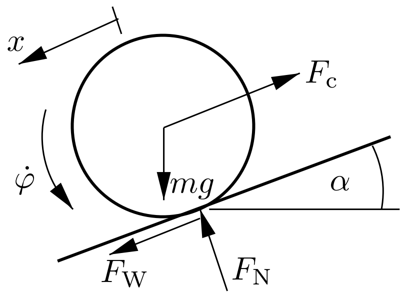

Abb. 4: Freischnitt des Systems c)

Drehimpulssatz und Schwerpunktsatz nach Abb. 4:

$$
\Theta^S \ddot{\varphi} = \sum M^{\text{ext}} = -aF_W \qquad\qquad m\ddot{x} = mg\sin\alpha + F_W - F_c \ ,
$$

Kinematik (reines Rollen):

$$
\dot{x} = a\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = a\ddot{\varphi} \ .
$$

Alles einsetzen ($\Theta^{(S)} = \frac{1}{2}ma^2$):

$$
\begin{aligned}
& \left(m + \frac{\Theta^{(S)}}{a^2}\right)\ddot{x} + cx = mg\sin\alpha \\
& \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = C \\
& \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m + \Theta^{(S)}/a^2}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} \ .
\end{aligned}
$$

d)

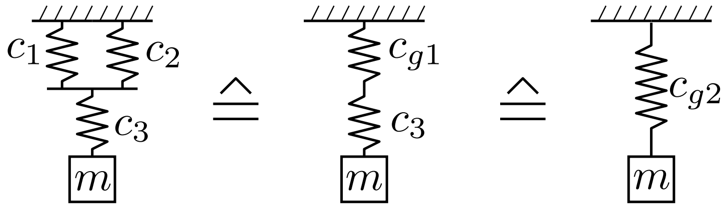

Abb. 5: Freischnitt des Systems d)

$$c_{\mathrm{g}1} = c_1 + c_2$$
$$\frac{1}{c_{\mathrm{g}2}} = \frac{1}{c_{\mathrm{g}1}} + \frac{1}{c_3} \quad \Rightarrow \quad c_{\mathrm{g}2} = \frac{c_3(c_1+c_2)}{c_1+c_2+c_3}\ .$$

Und in Analogie zu den vorigen Aufgabenteilen erhält man nach Freischnitt in Abb. 5:

$$m\ddot{x} + c_{\mathrm{g}2}x = mg$$
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{c_{\mathrm{g}2}}{m}\ .$$

e) *Beachte*: Der Balken muss als masselos angenommen werden.

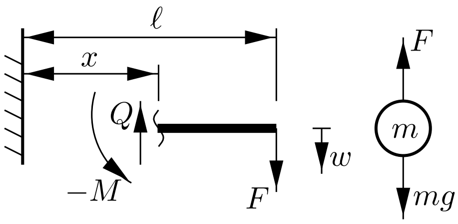

Abb. 6: Freischnitt des Systems e)

Zweites NEWTONsches Gesetz für den rechten Freischnitt (Abb. 6):

$$m\ddot{w} = -F + mg\ .$$

Ausdruck für die Kraft F aus Balken-Biegelinie:

$$EIw''(x) = -M = F(\ell - x)$$
$$w'(x) = \int_0^x w''\mathrm{d}x + w'(0) = \frac{F}{EI}(\ell x - \frac{x^2}{2})$$
$$w(x) = \int_0^x w'\mathrm{d}x + w(0) = \frac{F}{EI}[\ell\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}]$$
$$\Rightarrow w(\ell) = \frac{F\ell^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3EI}{\ell^3}w$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Eingesetzt:

$$m\ddot{w} = -\frac{3EI}{\ell^3}w + mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{w} + \frac{3EI}{m\ell^3}w = g$$
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{m\ell^3}}$$

Hausaufgaben

3. Aufgabe

a)

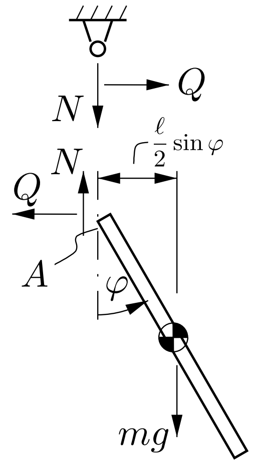

Abb. 7: Freischnitt des Pendelstabes

Drehimpulssatz um A nach Freischnitt in Abb. 7:

$$\Theta^{(A)}\ddot{\varphi} = -\frac{\ell}{2}\sin\varphi mg \ . \tag{1}$$

Massenträgheitsmoment mit Steinerschem Satz:

$$\Theta^{(A)} = \Theta^{(S)} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 \ . \tag{2}$$

So ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \ . \tag{3}$$

b) Linearisierung:

Linearisierung der Trigonometrischen Funktionen für kleine Winkel um den Winkel Null:

$$\sin\varphi \approx \varphi \ , \tag{4}$$
$$\cos\varphi \approx 1 \ . \tag{5}$$

Aus der DGL (3) wird damit

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\varphi = 0\ . \tag{6}$$

c) Der Ansatz $\varphi = e^{\lambda t}$ eingesetzt in die DGL (6) ergibt:

$$\Big(\lambda^2 + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\Big)e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell} = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}\ . \tag{8}$$

Die allgemeine (komplexwertige) Lösung der DGL (6) lautet:

$$\varphi(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit} \ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}\ . \tag{9}$$

Bestimmen der Koeffizienten A und B durch Auswerten der Anfangsbedingung:

Erstens $\dot{\varphi}(t=0) = 0$:

$$\dot{\varphi}(t) = i\omega_0\left(Ae^{i\omega_0 t} - Be^{-i\omega_0 t}\right) \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = i\omega_0(A - B) \quad \Rightarrow \quad A = B\ . \tag{11}$$

Zweite Anfangsbedingung $\varphi(t=0) = \varphi_0$:

$$\varphi_0 = A + B = 2A \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}\varphi_0\ . \tag{12}$$

Einsetzen in Gl. (9) ergibt mit $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ die rein reelle Lösung[1]:

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega_0 t\ . \tag{13}$$

d) Die (ungedämpfte) Eigenkreisfrequenz bei einem System mit der Bewegungsdifferentialgleichung $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ heißt ω_0. In unserem Fall ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}$.

4. Aufgabe

Schwerpunktsatz und Drallsatz um den Schwerpunkt nach Freischnitt in Abb. 8:

$$m\ddot{x} = -F_{\mathrm{H}} - F_{c_1} - F_{c_2}\ , \tag{1}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})}\ddot{\varphi} = -F_{c2}a\cos\varphi + F_{\mathrm{H}}a \approx -F_2 a + F_{\mathrm{H}}a \tag{2}$$

Ersatzfedersteifigkeit:

wird überführt in

[1] Sollte beim Einsetzen reeller Anfangsbedingungen eine nicht rein reelle Lösung herauskommen, so hat man sich verrechnet.

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

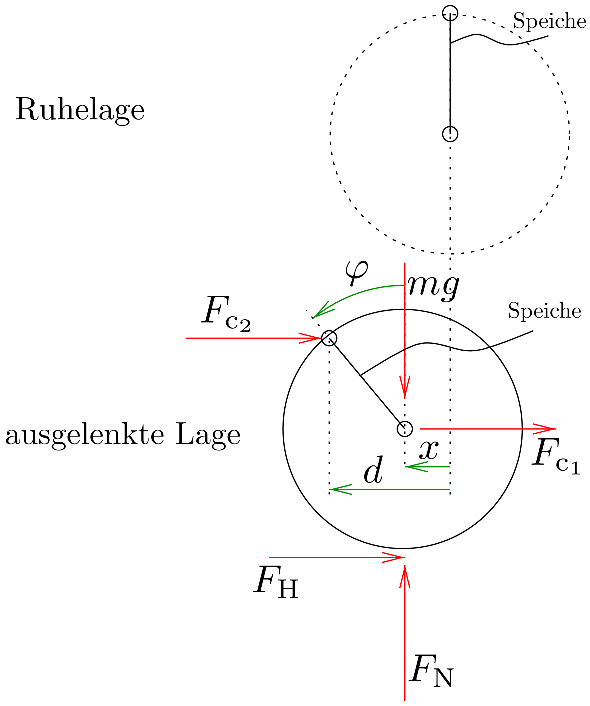

Abb. 8: Freischnitt der ausgelenkten Lage

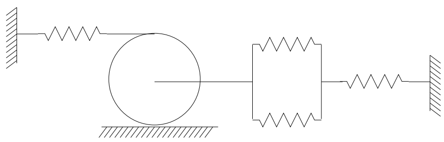

Abb. 9: System laut Aufgabenstellung

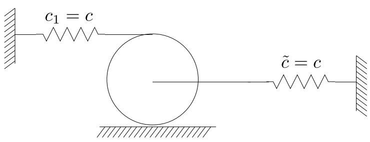

Abb. 10: System mit Ersatzfedersteifigkeit $\tilde{c}$

$\tilde{c}$ wird mit Abb. 9 & 10 bestimmt zu:

$$\frac{1}{\tilde{c}} = \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_2 + c_3} = \frac{1}{3c} + \frac{1 \cdot 2}{3c} = c\ .$$

Kraftgesetze:
Für die Federkräfte gilt, wie man am Freischnitt für die ausgelenkte Lage (Abb. 8) erkennt:

$$F_{c_1} = cx\ , \tag{3}$$
$$F_{c_2} = cd\ . \tag{4}$$

Kinematik:

Die kinematischen Beziehungen lauten (Rollen ohne Schlupf):

$$\dot{x} = a\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = a\ddot{\varphi} \; . \tag{5}$$

Mit $x(t=0) = 0$ und $\varphi(t=0) = 0$ folgt:

$$
\begin{aligned}
x &= a\varphi && (6)\\
\Rightarrow d &= x + a\sin\varphi \overset{|\varphi|\ll 1}{\approx} x + a\varphi && (7)\\
&= 2a\varphi \; . && (8)
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die Gl. (1) und (2):

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -F_{\mathrm{H}} - ca\varphi - c2a\varphi = -F_{\mathrm{H}} - 3ca\varphi \; , && (9)\\
\Theta^{(\mathrm{S})}\ddot{\varphi} &= -c2a^2\varphi + F_{\mathrm{H}}a && (10)\\
\Rightarrow \quad F_{\mathrm{H}} &= \frac{\Theta^{(\mathrm{S})}\ddot{\varphi}}{a} + 2ca\varphi && (11)
\end{aligned}
$$

und das eingesetzt in (9) liefert mit (5):

$$
\begin{aligned}
ma\ddot{\varphi} &= -5ca\varphi - \frac{\Theta^{(\mathrm{S})}}{a}\ddot{\varphi} && (12)\\
\Rightarrow \quad (m + \frac{\Theta^{(\mathrm{S})}}{a^2})\ddot{\varphi} + 5c\varphi &= 0 \; . && (13)
\end{aligned}
$$

Mit $\Theta^{(\mathrm{S})} = \frac{1}{2}ma^2$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}m + m\right)\ddot{\varphi} + 5c\varphi &= 0\\
\frac{3}{2}m\ddot{\varphi} + 5c\varphi &= 0\\
\ddot{\varphi} + \frac{10}{3}\frac{c}{m}\varphi &= 0\\
\Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{10}{3}\frac{c}{m}} \; . && (14)
\end{aligned}
$$