

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

- a) Zunächst wird der Drall- und der Schwerpunktsatz der Rolle in x -Richtung, siehe Gl. (1)₁ und (1)₂, und der Schwerpunktsatz der Masse in y -Richtung aufgestellt. Dabei werden in Abb. 1 und Abb. 2 dargestellten Freischnitte und Koordinatensysteme verwendet.

$$\Theta^{(S)}\ddot{\varphi} = M(t) + rF_S - R \cos(\varphi)F_c - RF_W, \quad m_1\ddot{x} = F_S + F_W - F_c, \quad (1)$$

$$m_2\ddot{y} = m_2g - F_D - F_S. \quad (2)$$

In Gl. (1)₁ wird die Linearisierung der Winkelfunktionen für kleine Auslenkungen in φ durchge-

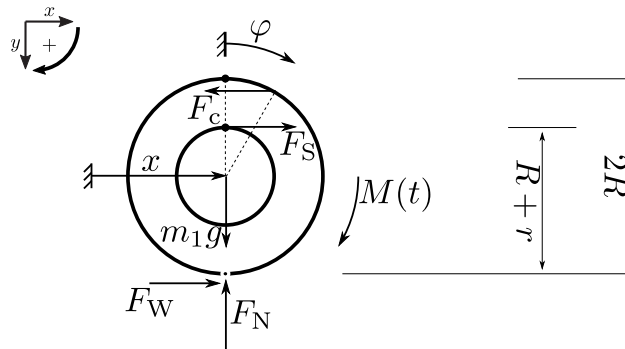


Abb. 1: Freischnitt der Rolle.

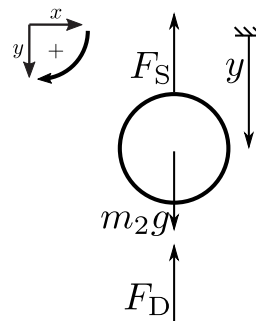


Abb. 2: Freischnitt der Masse.

führt, d. h. $\cos(\varphi) \approx 1$. Anschließend wird die Widerstandskraft F_W eliminiert, indem Gl. (1)₂ mit R multipliziert und zu Gl. (1)₁ hinzu addiert wird. Es ergibt sich schließlich:

$$m_1 R \ddot{x} + \Theta^{(S)} \ddot{\varphi} = M(t) + (R + r)F_S - 2RF_c. \quad (3)$$

Das System hat einen Freiheitsgrad. Das heißt die Bewegung aller Körper kann mit einer (frei wählbaren) Koordinate beschrieben werden. Hier wird x als Koordinate gewählt. Um die Bewegung des Systems mit dieser Koordinate erfassen zu können, müssen nun die anderen Koordinaten des Systems durch x ausgedrückt werden. Dabei wird die EULERSche Kinematikgleichung herangezogen. Der Momentanpol der Rolle liegt stets im Kontakt, da sich die Rolle rein rolled bewegt. Dann können die Größen $\dot{\varphi}$, \dot{x}_B und \dot{y} wie in Abb. 3 gezeigt durch den Strahlensatz mit \dot{x} verknüpft

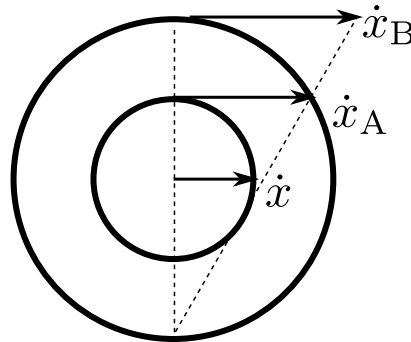


Abb. 3: Kinematik der Rolle.

werden:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{R} \dot{x}, \quad \dot{y} = \dot{x}_A = (R+r)\dot{\varphi} = \left(1 + \frac{r}{R}\right) \dot{x}, \quad \dot{x}_B = 2\dot{x}. \quad (4)$$

Um die Schwingungsdifferentialgleichung ausschließlich in gegebenen Größen ausdrücken zu können, müssen die Federkraft F_c und die Dämpferkraft F_D in Gl. (3) durch gegebene Größen ausgedrückt werden. Dazu werden die folgenden Kraftgesetze verwendet:

$$F_c = cx_B = 2cx, \quad F_D = k\dot{y} = k\dot{x}_c = k\left(1 + \frac{r}{R}\right) \dot{x}. \quad (5)$$

Setzt man nun Gl. (2) sowie Gl. (4) und (5) in Gl. (3) ein, erhält man die Schwingungsdifferentialgleichung in den gegebenen Größen:

$$\left[\frac{\Theta^{(S)}}{R^2} + m_1 + \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 m_2 \right] \ddot{x} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 k\dot{x} + 4cx = \frac{M_0}{R} \cos(\Omega t) + \left(1 + \frac{r}{R}\right) m_2 g. \quad (6)$$

Im Folgenden werden die Standardbezeichnungen für die Koeffizienten der Schwingungsdifferentialgleichung eingeführt, anhand derer das Verhalten des schwingungsfähigen Systems charakterisiert wird. \tilde{m} bezeichnet dabei die *Trägheit des Systems*, δ den *Abklingkoeffizienten*, das *LEHRsche Dämpfungsmaß* $D = \delta/\omega_0$, die *Eigenkreisfrequenz* ω_0 des ungedämpften Systems und die *Fremdanregung* $f_0 + f_1 \cos(\Omega t)$ des Systems. Mit Gl. (9) ergibt sich somit die Standardform unserer gedämpften, fremderregten Schwingungsdifferentialgleichung zu:

$$\tilde{m} = \left[\frac{\Theta^{(S)}}{R^2} + m_1 + \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 m_2 \right], \quad 2\delta = \frac{k\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}{\tilde{m}}, \quad \omega_0^2 = \frac{4c}{\tilde{m}}, \quad (7)$$

$$f_0 = \frac{m_2 g \left(1 + \frac{r}{R}\right)}{\tilde{m}}, \quad f_1 = \frac{M_0}{R\tilde{m}}, \quad (8)$$

$$\underline{\underline{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 + f_1 \cos(\Omega t)}}. \quad (9)$$

Die statische Ruhelage beschreibt die Lage, in der das System ohne dynamische Fremdanregung ($M(t) = 0$ bzw. $f_1 = 0$) in Ruhe ist. Das System befindet sich dann also in einem ruhenden, unbeschleunigten Zustand, d. h. es gilt: $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$ und $x = x_{\text{stat.}}$. Somit ergibt sich:

$$x_{\text{stat.}} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{m_2 g \left(1 + \frac{r}{R}\right)}{4c}. \quad (10)$$

- b) Nun soll die Schwingungsdifferentialgleichung für die Schwingung um die statische Ruhelage x_{stat} bestimmt werden. Dafür wird zuerst die ursprüngliche Bewegungsvariable x durch \tilde{x} substituiert, wobei gilt: $x = \tilde{x} + x_{\text{stat}}$. Durch simples Einsetzen in Gl. (9) ergibt sich, dass der zeitlich konstante Anteil der *Fremdanregung* oder mathematisch gesprochen auch die *Inhomogenität* verschwindet. Das liegt daran, dass das System gerade um die statische Ruhelage oszilliert (Gl. (11)). Die gesuchte Schwingungsdifferentialgleichung für die Schwingung um die statische Ruhelage lautet somit:

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = f_1 \cos(\Omega t) . \quad (11)$$

- c) Zur Untersuchung der Eigenkreisfrequenzen wird zunächst die Lösung der homogenen Bewegungsdifferentialgleichung (12) (ohne Errregung):

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0 . \quad (12)$$

Im Folgenden wird auf die „Tilde“ über dem x verzichtet.

Zur Lösung der Differentialgleichung wird folgender Exponentialansatz verwendet:

$$x_h(t) = Ae^{\lambda t} , \quad \dot{x}_h(t) = \lambda Ae^{\lambda t} , \quad \ddot{x}_h(t) = \lambda^2 Ae^{\lambda t} . \quad (13)$$

Dieser Ansatz sowie dessen oben angegebene Ableitungen wird nun in Gl. (12) eingesetzt, um das charakteristische Polynom zu bestimmen. Der triviale Fall $A = 0$ wird ausgeschlossen, da sich sonst das System gar nicht bewegen würde. Somit ergeben sich folgende quadratische Bestimmungsgleichung für λ :

$$\left(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2\right) A = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} . \quad (14)$$

Das LEHRsche Dämpfungsmaß $D = \delta/\omega_0$, auch *Dämpfungsgrad* genannt, wird eingeführt, um die Schwingfähigkeit des Systems zu diskutieren. Dazu werden die Lösungen $\lambda_{1,2}$ in der folgenden Form geschrieben:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\left(\frac{\delta^2}{\omega_0^2} - 1\right) \omega_0^2} = -\delta \pm i\sqrt{\left(1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right) \omega_0} = -\delta \pm i\omega_d \quad (15)$$

mit

$$\omega_d = \sqrt{1 - D^2} \omega_0 \quad \text{und} \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{k(1 + \frac{r}{R})^2}{4\sqrt{c\tilde{m}}} .$$

Falls $D > 1$ ist, überwiegt die Dämpfung und die Wurzeln $\lambda_{1,2}$ des Exponentialansatzes sind rein reell und negativ. Dies hat eine rein abklingende, nicht schwingende Bewegung zur Folge. Das System wird dann als *nicht schwingungsfähig* bezeichnet. Ist das Dämpfungsmaß D kleiner als eins ($D < 1$), überwiegt die Schwingbestrebung der Dämpfung im System und die Wurzeln $\lambda_{1,2}$ des Exponentialansatzes sind komplex, was auf eine in der Amplitude abklingende, aber schwingende Lösung führt. Das System wird dann als *schwingungsfähig* bezeichnet. Die Eigenkreisfrequenz ω_d , mit der das gedämpfte System schwingt, ergibt sich aus dem Imaginärteil der Wurzel $\lambda_{1,2}$ und wird auch als *gedämpfte Eigenkreisfrequenz* bezeichnet.

Im Folgenden wird lediglich das schwingungsfähige System diskutiert. Wenn die EULERSche Formel für die Exponentialfunktion auf die Lösung der Bewegungsgleichung angewendet wird, ergibt sich als Lösung eine Linearkombination trigonometrischer Funktionen (harmonische

Schwingungen), deren Amplitude durch eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten beschrieben wird. Es gilt:

$$x_h(t) = e^{-\delta t} ((A_1 + A_2) \cos(\omega_d t) + i(A_1 - A_2) \sin(\omega_d t)) . \quad (16)$$

Es handelt sich folglich um harmonische, abklingende Schwingungen. Die *gedämpfte Eigenkreisfrequenz*, mit der Periodendauer der Schwingung bestimmt werden kann, ist gegeben durch:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{4c}{\tilde{m}} - \frac{k^2}{4\tilde{m}} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^4} . \quad (17)$$

- d) Nun wird die partikuläre Lösung von Gl. (11) unter mit einem *Ansatz vom Typ der rechten Seite* bestimmt. Es gilt:

$$x_p(t) = \hat{x} \cos(\Omega t - \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad x_p = \hat{x} \cos(\Omega t) \cos(\varphi) + \hat{x} \sin(\Omega t) \sin(\varphi) . \quad (18)$$

Dabei bezeichnet \hat{x} die *Amplitude* und φ die *Phasenverschiebung*. Diese beiden Unbekannten werden im Folgenden an das vorliegende System angepasst. Dazu werden die Ableitungen des Ansatzes in Gl. (18) berechnet. Es gilt:

$$\dot{x}_p(t) = -\Omega \hat{x} \sin(\Omega t) \cos(\varphi) + \Omega \hat{x} \cos(\Omega t) \sin(\varphi) , \quad (19)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 \hat{x} \cos(\Omega t) \cos(\varphi) - \Omega^2 \hat{x} \sin(\Omega t) \sin(\varphi) . \quad (20)$$

Substitution der obigen Ableitungen und des Ansatzes in Gl. (18) in Gl. (11) liefert:

$$0 = \cos(\Omega t) \left(-\Omega^2 \hat{x} \cos(\varphi) + 2\delta\Omega \hat{x} \sin(\varphi) + \omega_0^2 \hat{x} \cos(\varphi) - \frac{M_0}{R\tilde{m}} \right) + \sin(\Omega t) \left(-\Omega^2 \hat{x} \sin(\varphi) - 2\delta\Omega \hat{x} \cos(\varphi) + \omega_0^2 \hat{x} \sin(\varphi) \right) . \quad (21)$$

Da die Summe der orthogonalen (deswegen linear unabhängigen) Funktionen $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ nur dann null sein kann, wenn beide Klammern gleichzeitig null sind, ergibt sich aus Gl. (21) :

$$-\Omega^2 \hat{x} \cos(\varphi) + 2\delta\Omega \hat{x} \sin(\varphi) + \omega_0^2 \hat{x} \cos(\varphi) - \frac{M_0}{R\tilde{m}} = 0 , \quad (22)$$

$$-\Omega^2 \hat{x} \sin(\varphi) - 2\delta\Omega \hat{x} \cos(\varphi) + \omega_0^2 \hat{x} \sin(\varphi) = 0 . \quad (23)$$

Mithilfe der obigen Gleichungen lassen sich die beiden Unbekannten \hat{x} und φ bestimmen. Aus Gl. (23) ergibt sich die *Phasenverschiebung* φ zu:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) . \quad (24)$$

Häufig wird in der Literatur die dimensionslose Kennzahl $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ eingeführt, die das Verhältnis von *Erregerkreisfrequenz* Ω zur *Eigenkreisfrequenz* ω_0 des ungedämpften Systems beschreibt. Dann lässt der obige Ausdruck auch wie folgt schreiben:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \right) . \quad (25)$$

Zur Bestimmung der Amplitude \hat{x} wird Gl. (22) mit $\cos(\varphi)$ und Gl.(23) mit $\sin(\varphi)$ multipliziert

und anschließend werden diese Gleichungen addiert. Dies ergibt:

$$0 = \hat{x} (\omega_0^2 - \Omega^2) - \frac{M_0}{R\tilde{m}} \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \frac{M_0}{R\tilde{m}} \frac{\cos(\varphi)}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{M_0}{R\tilde{m}\omega_0^2} \frac{\cos(\varphi)}{1 - \eta^2}. \quad (26)$$

Der Kosinus der Phasenverschiebung φ wird mittels der Hilfsformel

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\varphi)} \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}}$$

eliminiert und für die Amplitude ergibt sich unter Verwendung von Gl. (25):

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \frac{M_0}{R\tilde{m}\omega_0^2}. \quad (27)$$

Diese Funktion wird auch *Vergrößerungsfunktion* genannt. Falls $\eta = 1$ ist, d. h. die *Erregerkreisfrequenz* ist gleich der *Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems*, würde die Amplitude im ungedämpften Fall ($D = 0$) gegen Unendlich streben. Man spricht dann vom *Resonanzfall*.

Die Gesamtlösung der Differentialgleichung ergibt sich aus der Addition der homogenen Lösung in Gl. (16) und der partikulären Lösung in Gl. (18), wobei im eingeschwungenen Zustand (für $t \rightarrow \infty$) die homogene Lösung abgeklungen ist und nur die partikuläre verbleibt.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Alternativer Lösungsweg: Die partikuläre Lösung $x_p(t)$ der Differentialgleichung kann auch auf einem anderen Weg gefunden werden. Um den vollständigen Lösungsraum zu bekommen, wird die Hilfsfunktion y_p definiert, welche die Antwort auf eine sinus-förmige Anregung darstellen soll:

$$\ddot{y}_p + 2\delta\dot{y}_p + \omega_0^2 y_p = \frac{M_0}{R\tilde{m}} \sin(\Omega t). \quad (28)$$

Dies ermöglicht eine komplexe Erweiterung der Differentialgleichung, indem man die obige Gleichung mit i multipliziert und zur Ausgangsgleichung (??) addiert. Es ergibt sich:

$$\ddot{x}_p + i\dot{y}_p + 2\delta(\dot{x}_p + i\dot{y}_p) + \omega_0^2(x_p + iy_p) = \frac{M_0}{R\tilde{m}} (\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)). \quad (29)$$

Durch die Substitution $z_p = x_p + iy_p$ und die Anwendung der EULER-Formel für die Exponentialfunktion ergibt sich:

$$\ddot{z}_p + 2\delta\dot{z}_p + \omega_0^2 z_p = \frac{M_0}{R\tilde{m}} e^{i\Omega t} \quad (30)$$

Diese komplexe Schwingungsdifferentialgleichung wird im Folgenden für $z_p(t)$ gelöst und die physikalische Lösung ergibt sich als Realteil von $z_p(t)$, d. h. $\Re(z_p(t)) = x_p(t)$.

Die Lösung von Gl. (30) wird wiederum mit dem *Ansatz vom Typ der rechten Seite* berechnet. Dieser Ansatz wird manchmal auch als *Gleichtaktansatz* bezeichnet. Der Ansatz und dessen zeitliche Ableitungen lauten im komplexen Fall:

$$z_p(t) = \hat{z}_p e^{i\Omega t}, \quad \dot{z}_p(t) = i\hat{z}_p \Omega e^{i\Omega t}, \quad \ddot{z}_p(t) = -\hat{z}_p \Omega^2 e^{i\Omega t}. \quad (31)$$

Substitution in Gl. (30) liefert:

$$\hat{z}_p \left(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega \right) e^{i\Omega t} = \frac{M_0}{R\tilde{m}} e^{i\Omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{z}_p = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega} \frac{M_0}{R\tilde{m}}. \quad (32)$$

Hier wird auch wieder das Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ und der Dämpfungsgrad $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ eingesetzt. Dazu wird Gl. (32) mit $1/\omega_0^2$ erweitert. Es ergibt sich

$$\hat{z}_p = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega} \frac{M_0}{R\tilde{m}} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{1 - \eta^2 + 2iD\eta} \frac{M_0}{R\tilde{m}\omega_0^2}. \quad (33)$$

Damit ist die Lösung der komplex erweiterten Schwingungsdifferentialgleichung (30) gefunden worden. Nun ist es noch erforderlich die ursprünglich gesuchte (reelle) Lösung $x_p(t)$ zu bestimmen. Dazu werden die komplexe Amplitude \hat{z}_p und die komplexe Lösung $z_p(t)$ zunächst geschrieben als:

$$\hat{z}_p = |\hat{z}_p| e^{-i\varphi}, \quad z_p(t) = \hat{z}_p e^{i\Omega t} = |\hat{z}_p| e^{-i\varphi} e^{i\Omega t} = |\hat{z}_p| e^{i(\Omega t - \varphi)}. \quad (34)$$

Nun wird der Realteil von $z_p(t)$ mithilfe der obigen Darstellung bestimmt. Durch Anwendung der EULER-Formel für die Exponentialfunktion ergibt sich dieser zu:

$$x_p(t) = \Re(z_p(t)) = |\hat{z}_p| \Re\left(e^{i(\Omega t - \varphi)}\right) = |\hat{z}_p| \cos(\Omega t - \varphi). \quad (35)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in Gl. (18) überein. Abschließend wird gezeigt, dass die Ausdrücke für $|\hat{z}_p|$ bzw. die Amplitude \hat{x}_p und den Phasenwinkel φ mit den oben bereits berechneten Ausdrücken übereinstimmen. Es gilt:

$$\hat{x}_p = |\hat{z}_p| = \left| \frac{1}{1 - \eta^2 + 2iD\eta} \frac{M_0}{R\tilde{m}\omega_0^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \frac{M_0}{R\tilde{m}\omega_0^2}, \quad (36)$$

was mit Gl. (27) übereinstimmt. Für die Phasenverschiebung ergibt sich:

$$-\varphi = \arctan\left(\frac{\Im(\hat{z}_p)}{\Re(\hat{z}_p)}\right) = \arctan\left(\frac{-2D\eta}{1 - \eta^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right), \quad (37)$$

was äquivalent zu Gl. (25) ist.

2. Aufgabe

a) Drehimpulssatz um den Punkt A (der auf der zeitlich festen Drehachse liegt):

$$-\Theta^A \ddot{\varphi} = +F_1 \cos(\varphi) a + F_2 \cos(\varphi) (b + c) + F_D \cos(\varphi) b \quad (1)$$

$$-(\Theta^S + mb^2) \ddot{\varphi} = +F_1 \cos(\varphi) a + F_2 \cos(\varphi) (b + c) + F_D \cos(\varphi) b \quad (2)$$

Kinematik (bei kleinem Drehwinkel φ , also schon linearisiert):

$$x_1 = a \sin(\varphi) \approx a\varphi \quad (3)$$

$$x_2 = (b + c) \sin(\varphi) \approx (b + c)\varphi \quad (4)$$

$$x_3 = b \sin(\varphi) \Rightarrow \dot{x}_3 = b\dot{\varphi} \cos(\varphi) \approx b\dot{\varphi} \quad (5)$$

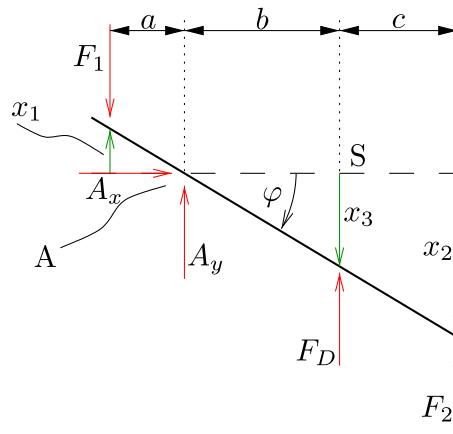


Abb. 4: Freischnitt

Kraftgesetze:

$$F_1 = c_1 x_1 = c_1 a \sin(\varphi) \approx c_1 a \varphi \quad (6)$$

$$F_2 = c_2 x_2 = c_2 (b + c) \sin(\varphi) \approx c_2 (b + c) \varphi \quad (7)$$

$$F_D = k \dot{x}_3 = kb \dot{\varphi} \cos(\varphi) \approx kb \dot{\varphi} \quad (8)$$

Zusammenfassen:

$$(\Theta^S + mb^2) \ddot{\varphi} + c_1 a^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + c_2 (b + c)^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + kb^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi} = 0 \quad (9)$$

$$(\Theta^S + mb^2) \ddot{\varphi} + c_1 a^2 \varphi + c_2 (b + c)^2 \varphi + kb^2 \dot{\varphi} = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{kb^2}{\Theta^S + mb^2} \dot{\varphi} + \frac{c_1 a^2 + c_2 (b + c)^2}{\Theta^S + mb^2} \varphi = 0 \quad (\text{Schwingungs-DGL}) \quad (11)$$

- b) Die allgemeine Form der Schwingungsdifferentialgleichung einer freien gedämpften Schwingung lautet:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (12)$$

Sie hat bei schwacher Dämpfung $\delta^2 < \omega^2$ die Lösung:

$$x(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (13)$$

mit der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}, \quad (14)$$

die bei verschwindender Dämpfung $\delta \rightarrow 0$ übergeht in die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω .

Ein Koeffizientenvergleich von (11) mit (12) ergibt:

$$2\delta = \frac{kb^2}{\Theta^S + mb^2} \quad (15)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_1 a^2 + c_2 (b+c)^2}{\Theta^S + mb^2}} \quad (16)$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{c_1 a^2 + c_2 (b+c)^2}{\Theta^S + mb^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{kb^2}{\Theta^S + mb^2} \right)^2} \quad (17)$$

Gleichung (16) gibt die gesuchte ungedämpfte und Gleichung (17) die gedämpfte Eigenfrequenz an.

c) Eine Schwingung stellt sich nur bei „schwacher Dämpfung“ ein, wenn $\delta^2 < \omega^2$:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{kb^2}{\Theta^S + mb^2} \right)^2 < \frac{c_1 a^2 + c_2 (b+c)^2}{\Theta^S + mb^2} \quad (18)$$

Für den Spezialfall $c_1 = 2c_2$ und $a = b = c$ ergibt sich:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{ka^2}{\Theta^S + ma^2} \right)^2 < \frac{6c_2 a^2}{\Theta^S + ma^2} \quad .$$

Damit das System schwingt, muss demnach gelten:

$$k^2 < \frac{24}{a^2} (\Theta^S + ma^2) c_2 \quad (19)$$

Hausaufgaben

3. Aufgabe

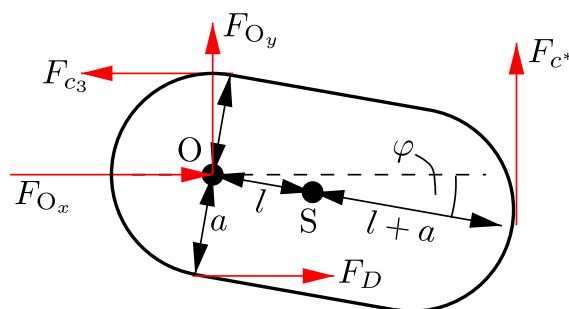


Abb. 5: Freischnitt

a) Drehimpulssatz um O:

$$\Theta^O \ddot{\varphi} = -F_{c3} a - F_D a - F_{c^*} (2l + a) \quad (1)$$

Kinematik und Kraftgesetze:

$$F_D = ka\dot{\varphi}$$

$$F_{c_3} = c_3a\varphi$$

$$F_{c^*} = c^*(2l + a)\varphi$$

Bei Reihenschaltung von Federn addieren sich die Nachgiebigkeiten:

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow c^* = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \quad (3)$$

Steinerscher Satz (Parallelachsensatz):

$$\Theta^O = \Theta^S + ml^2$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung lautet dann aus Gl. (1):

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (4)$$

$$\text{mit } \delta = \frac{1}{2} \frac{ka^2}{\Theta^S + ml^2}, \quad \omega^2 = \frac{c^*(2l + a)^2 + c_3a^2}{\Theta^S + ml^2}$$

b) Gedämpftes System:

Lösung der homogenen DGL (4) mit einem Exponentialansatz $\varphi = e^{\lambda t}$. Eingesetzt in die DGL (4):

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

bei schwacher Dämpfung, d.h. $\omega^2 > \delta^2$:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

Beim Einsetzen von $\lambda_{1/2}$ in den Exponentialansatz (zur Erinnerung: $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$) erhalten wir schließlich

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} [A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t] \quad (5)$$

mit reellen Konstanten A_1 und A_2 und mit der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems

$$\begin{aligned} \omega_d &= \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \\ &= \sqrt{\frac{c^*(2l + a)^2 + c_3a^2}{\Theta^S + ml^2} - \frac{k^2a^4}{4(\Theta^S + ml^2)^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

wobei c^* durch Gl. (3) gegeben ist. Die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ist gerade ω , wie man für $k = 0$ aus Gl. ((6)) erkennt.

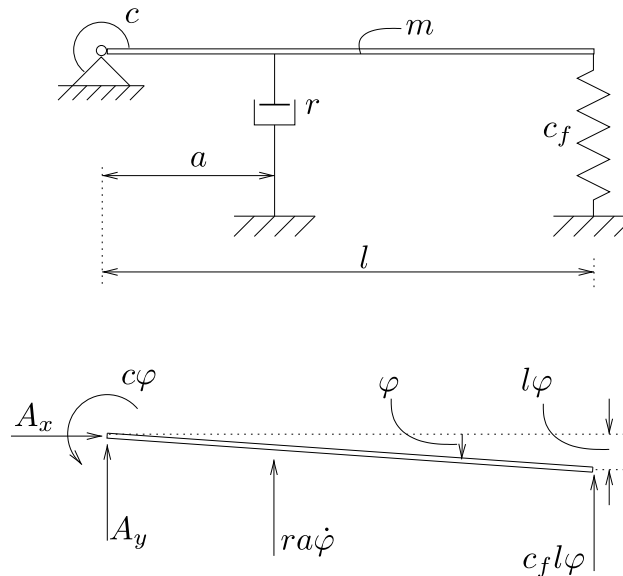


Abb. 6: Vereinfachtes Modell mit der Ersatzsteifigkeit $c = 2\frac{1}{2}c_d$ für die parallel geschalteten Drehfedern und ausgelenkte Lage für $|\varphi| \ll 1$ mit Schnittkräften

4. Aufgabe

a) Der Drallsatz um den ruhenden Punkt A liefert:

$$\Theta^A \ddot{\varphi} = -c\varphi - ra^2\dot{\varphi} - c_f l^2 \varphi \quad (1)$$

mit $\Theta^A = \Theta^S + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$ bekannt. (1) umgestellt liefert mit den Abkürzungen $2\delta := \frac{ra^2}{\Theta^A}$ und $\omega^2 := \frac{c+c_f l^2}{\Theta^A}$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (2)$$

b) Der Ansatz $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ eingesetzt in (2) liefert:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0 \quad (3)$$

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \quad (4)$$

Für schwache Dämpfung $\delta^2 \ll \omega^2$ ist das

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad \text{also } \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \quad (5)$$

c) Mit der Abkürzung $\omega_d := \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ lautet damit die allgemeine Lösung von (2)

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \{c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t)\} \quad (6)$$

Die spezielle Lösung erhält man durch Anpassen an die Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0) = 0 \quad (\text{AB 1})$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = \Omega \quad (\text{AB 2})$$

Aus (AB 1) folgt sofort $c_1 = 0$. Ausserdem erhält man durch Ableitung

$$\dot{\varphi}(t) = -\delta e^{-\delta t} \{c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t)\} \dots \quad (7)$$

$$\dots + e^{-\delta t} \{-c_1 \omega_d \sin(\omega_d t) + c_2 \omega_d \cos(\omega_d t)\} \quad (8)$$

$$\stackrel{c_1=0}{=} -\delta e^{-\delta t} c_2 \sin(\omega_d t) + e^{-\delta t} c_2 \omega_d \cos(\omega_d t) \quad (9)$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = c_2 \omega_d \stackrel{!}{=} \Omega_0 \quad (10)$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{\Omega_0}{\omega_d} \quad (11)$$

Die spezielle Lösung lautet also

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \left(\frac{\Omega_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \quad (12)$$

was eine abklingende Sinusschwingung darstellt.