

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

**Prof. Dr.-Ing. Albrecht Bertram
Institut für Mechanik**

Formelsammlung

zur

Technischen Mechanik

Ausgabe 2016

Formelsammlung *Technische Mechanik*

Ausgabe 2016

Prof. Dr.-Ing. A. Bertram

Bemerkung. Alle Materialkonstanten in diesem Text sind lediglich als typische Werte aufzufassen. Sie können im speziellen Fall abweichen.

Vektorrechnung

Definition: Ein (reeller) **Vektorraum** ist eine Menge, zwischen deren Elementen folgende Verknüpfungen definiert sind für alle Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und alle reellen Zahlen α , β :

1.) eine **Addition** (oder Summe) mit folgenden Regeln:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{kommutativ})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{assoziativ})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a} \quad (\text{Nullvektor})$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o} \quad (\text{Negativelement})$$

2.) eine **Multiplikation mit einem Skalar** (reelle Zahl) mit folgenden Regeln:

$$(\alpha \beta) \mathbf{a} = \alpha (\beta \mathbf{a}) \quad (\text{assoziativ})$$

$$1 \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\text{Einselement})$$

$$\alpha (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b} \quad (\text{distributiv})$$

$$(\alpha + \beta) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a} \quad (\text{distributiv})$$

3.) ein **Skalarprodukt** mit folgenden Regeln:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{kommutativ})$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{assoziativ})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{distributiv})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \quad \text{für } \mathbf{a} \neq \mathbf{o} \quad (\text{positiv-definit})$$

Betrag oder die **Länge** eines Vektors \mathbf{v} $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}$

Winkel φ zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w}

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \varphi.$$

Definition: Sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, $n > 0$, Vektoren und $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ reelle Zahlen, so heißt der Vektor $\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \alpha^2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha^n \mathbf{x}_n$ **Linearkombination** von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$.

Definition: Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn der Nullvektor nur als die triviale Linearkombination dargestellt werden kann

$$\mathbf{o} = 0 \mathbf{x}_1 + 0 \mathbf{x}_2 + \dots + 0 \mathbf{x}_n.$$

Andernfalls heißen die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ **linear abhängig**.

Dimension eines Vektorraums: maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

Vektorbasis eines Vektorraums: $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ linear unabhängige Vektoren von der Anzahl der Dimension.

Satz: Ist $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ eine Vektorbasis, so lässt sich jeder Vektor \mathbf{v} eindeutig darstellen als Linearkombination der Basisvektoren

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{x}_1 + v^2 \mathbf{x}_2 + \dots + v^n \mathbf{x}_n.$$

Die Skalare v^i heißen **Komponenten des Vektors \mathbf{v} bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$.**

Orthonormalbasis (ONB): alle Basisvektoren sind

wechselseitig orthogonal $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ für $i \neq j$

und normiert $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1$ für $i = j$

Vektor- oder Kreuzprodukt im Dreidimensionalen zwischen zwei Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w}

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad (\text{alternierend, antikommutativ})$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (\text{distributiv})$$

$$\alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\alpha \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \quad (\text{assoziativ}).$$

Winkel φ zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w}

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \varphi$$

Die Länge des Ergebnisvektors entspricht dem Flächeninhalt des von \mathbf{v} und \mathbf{w} aufgespannten Parallelogramms.

Für doppelte Kreuzprodukte gilt folgende Regel

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Bezüglich einer rechtsorientierten ONB $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ gelten

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

Spatprodukt im Dreidimensionalen zwischen drei Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w}

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] := \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

ist linear in allen drei Argumenten

mit den Regeln

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] &= [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] \\ &= -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}]. \end{aligned}$$

Darstellung bezüglich einer rechtsorientierten Orthonormalbasis:

Addition $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v^1 + w^1, v^2 + w^2, \dots, v^n + w^n)$

Multiplikation mit Skalar $\alpha \mathbf{v} = (\alpha v^1, \alpha v^2, \dots, \alpha v^n)$

Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^n w^n$

Kreuzprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v^2 w^3 - v^3 w^2) \mathbf{e}_1 - (v^1 w^3 - v^3 w^1) \mathbf{e}_2 + (v^1 w^2 - v^2 w^1) \mathbf{e}_3$

Spatprodukt $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (v^2 w^3 - v^3 w^2) u^1 - (v^1 w^3 - v^3 w^1) u^2 + (v^1 w^2 - v^2 w^1) u^3$

Kraftsysteme

Kraft: (\mathbf{F}, \mathbf{r})

\mathbf{F} **Kraftvektor** in Richtung der Kraft und von der Länge proportional zur Kraft-Größe
 $\mathbf{r}(X)$ Ortsvektor des Angriffspunktes im Körperpunkt X

Definition: Moment der Kraft (\mathbf{F}, \mathbf{r}) bezüglich des Drehpunkts X mit Ortsvektor \mathbf{r}_X

$$\mathbf{M}_X := (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}.$$

VARIGNONs Momentenprinzip: Ist \mathbf{M}_X das Moment einer Kraft (\mathbf{F}, \mathbf{r}) bezüglich X und \mathbf{M}_Y dasjenige derselben Kraft bezüglich Y , so gilt

$$\mathbf{M}_Y = \mathbf{M}_X + (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y) \times \mathbf{F}.$$

$(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y) \times \mathbf{F}$ heißt **Versetzungsmoment**.

Definition: Zwei Kraftsysteme

$$\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K)\} \quad \text{und} \quad \{(\underline{\mathbf{F}}_1, \underline{\mathbf{r}}_1), (\underline{\mathbf{F}}_2, \underline{\mathbf{r}}_2), \dots, (\underline{\mathbf{F}}_L, \underline{\mathbf{r}}_L)\}$$

heißen (statisch) **äquivalent**, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

$K\ddot{A}$) die Summen der Kraftvektoren sind gleich

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_K = \underline{\mathbf{F}}_1 + \underline{\mathbf{F}}_2 + \dots + \underline{\mathbf{F}}_L$$

$M\ddot{A}$) die Summen der Momente der Kräfte bezüglich eines Punktes X sind gleich

$$\mathbf{M}_{RX} := \sum_{i=1}^K [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_i] = \sum_{i=1}^L [(\underline{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_X) \times \underline{\mathbf{F}}_i] =: \underline{\mathbf{M}}_{RX}.$$

Definition: Die **resultierende Kraft** eines Kraftsystems ist diejenige Kraft $(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R)$, die zu dem Kraftsystem äquivalent ist, d. h.

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i$$

und
$$\mathbf{M}_{RX} := (\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_i].$$

Definition: Das Paar aus einer Kraft und einem freien Moment $\{(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R), \mathbf{M}\}$ heißt **äquivalentes Lastsystem** zu einem Kraftsystem, falls gelten

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i \quad \text{resultierender Kraftvektor}$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad \mathbf{M} : \text{freies Moment.}$$

Definition: Ein Kraftsystem heißt **Gleichgewichtssystem**, falls gelten

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{Kräftegleichgewicht}$$

$$\mathbf{M}_{RO} = \sum_{i=1}^K (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{Momentengleichgewicht bez. } O \text{ (beliebig)}$$

Gleichgewichtsbedingungen komponentenweise räumlich

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Kx} = 0 \quad (1)$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ky} = 0 \quad (2)$$

$$F_{Rz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{Kz} = 0 \quad (3)$$

$$M_{ROx} = 0 \quad M_{ROy} = 0 \quad M_{ROz} = 0 \quad (4 \div 6)$$

oder eben

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Kx} = 0 \quad (1)$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ky} = 0 \quad (2)$$

$$M_{ROz} = 0 \quad (3)$$

Axiom: Bei einem Körper, der sich in Ruhe befindet, ist das Lastsystem ein Gleichgewichtssystem.

Gebietsintegrale

Bestimmtes Integral nach RIEMANN

$$F \Big|_a^b := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Sind die Funktion und die Grenzen von einer zweiten Variablen y abhängig

$$F \Big|_{a(y)}^{b(y)} = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

so lautet die Ableitung des Integrals nach dieser zweiten Variablen

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \frac{db(y)}{dy} f(b(y), y) - \frac{da(y)}{dy} f(a(y), y)$$

- Linienintegral

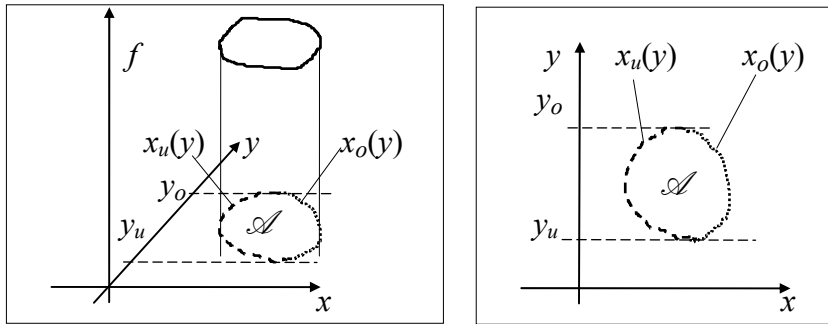
$$F(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} f(s) ds = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta L_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta L_i = \int_{x_u}^{x_o} f(x) l(x) dx$$

$$f(s) = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{F(\Delta L)}{\Delta L}$$

- Flächenintegral

$$F(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f(x, y) dA = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta A_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i = \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f(x, y) a(x, y) dx dy$$

$$f(x, y) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{F(\Delta A)}{\Delta A}$$



- Volumenintegral

$$F(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

$$= \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u(z)}^{y_o(z)} \int_{x_u(y,z)}^{x_o(y,z)} f(x, y, z) v(x, y, z) dx dy dz$$

$$f(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{F(\Delta V)}{\Delta V}$$

Integration über Vektorfelder

Komponentendarstellung des Vektorfeldes

$$\mathbf{f} = f^1 \mathbf{e}_1 + f^2 \mathbf{e}_2 + f^3 \mathbf{e}_3$$

f^i Skalarfelder, die von 1, 2 oder 3 KOO abhängen

- Linienintegral

$$\mathbf{F}(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{f} ds = \left[\int_{x_u}^{x_o} f^1(x) l(x) dx \right] \mathbf{e}_1$$

$$+ \left[\int_{x_u}^{x_o} f^2(x) l(x) dx \right] \mathbf{e}_2$$

$$+ \left[\int_{x_u}^{x_o} f^3(x) l(x) dx \right] \mathbf{e}_3$$

- Oberflächenintegral

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f} dA = \left[\int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f^1(x, y) a(x, y) dx dy \right] \mathbf{e}_1$$

$$+ \left[\int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f^2(x, y) a(x, y) dx dy \right] \mathbf{e}_2$$

$$+ \left[\int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f^3(x, y) a(x, y) dx dy \right] \mathbf{e}_3$$

- Volumenintegral

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} dV = & \left[\int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u(z)}^{y_o(z)} \int_{x_u(y,z)}^{x_o(y,z)} f^1(x, y, z) v(x, y, z) dx dy dz \right] \mathbf{e}_1 \\ & + \left[\int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u(z)}^{y_o(z)} \int_{x_u(y,z)}^{x_o(y,z)} f^2(x, y, z) v(x, y, z) dx dy dz \right] \mathbf{e}_2 \\ & + \left[\int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u(z)}^{y_o(z)} \int_{x_u(y,z)}^{x_o(y,z)} f^3(x, y, z) v(x, y, z) dx dy dz \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Masse eines Körper

$$m(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \rho dV$$

(Massen-)Dichte $\rho(X) = \frac{dm}{dV} := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$

für einige ausgewählte Materialien bei Raumtemperatur in $\text{g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$

Aluminium	2,7
Eisen	7,9
Kupfer	8,9
Glas	2,6
Eichenholz	0,9
Buchenholz	0,7
Tannenholz	0,5
Marmor	2,7
Wassereis bei 0°C	0,917

NEWTONsches Gravitationsgesetz: Zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r ihrer Mittelpunkte ziehen sich an mit einer Kraft der Größe

$$F_G = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

mit der universellen Gravitationskonstante $\Gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Gewichtskraft im Gravitationsfeld der Erde

$$\mathbf{F}_G = \Gamma \frac{M_E m}{(R_E + h)^2} \mathbf{e}_\downarrow \approx \frac{\Gamma M_E}{R_E^2} m \mathbf{e}_\downarrow = g m \mathbf{e}_\downarrow$$

mit m Masse des Körpers

M_E Erdmasse

R_E mittlerer Erdradius

h Höhe des Körpers über Erdnullniveau (für $h \ll R_E$)

$$g := \frac{\Gamma M_E}{R_E^2} \quad \text{irdische Gravitationskonstante (oft als } 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ angenommen)}$$

\mathbf{e}_\downarrow lotrechter Einheitsvektor.

Volumenmittelpunkt des Körpers $\mathbf{r}_V := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dV$

Massenmittelpunkt des Körpers $\mathbf{r}_M := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm$

Schwerpunkt des Körpers $\mathbf{r}_S := \frac{1}{F_G} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} g dm$

komponentenweise $r_{Vi} := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} x_i dx_1 dx_2 dx_3, \quad i = 1, 2, 3$

$$r_{Mi} := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} x_i \rho dx_1 dx_2 dx_3, \quad i = 1, 2, 3$$

$$r_{Si} := \frac{1}{F_G} \int_{\mathcal{V}} x_i g \rho dx_1 dx_2 dx_3, \quad i = 1, 2, 3$$

Satz: *Besitzt ein Körper eine Symmetrie-Achse oder -Ebene bezüglich seiner Form und seiner Massenverteilung, so liegt der Massenmittelpunkt auf dieser.*

Satz: *Ist ein Körper aus n Teilkörpern mit den Massen m_i und den Massenmittelpunkten \mathbf{r}_{Mi} zusammengesetzt, so gilt für dessen Massenmittelpunkt*

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{Mi} \quad \text{mit} \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Reibung

Haftreibungsgesetz: *Zwei Körper in Kontakt haften aneinander, solange für die tangential (Haft-) Reibungskraft R gilt*

$$|R| < \mu_0 N$$

mit der **Haftreibungszahl** $\mu_0 > 0$ und der Normalkraft N .

Stahl auf Stahl	$\mu_0 = 0,15$
Holz auf Holz	$\mu_0 = 0,4 \div 0,6$
Holz auf Metall	$\mu_0 = 0,6 \div 0,7$
Gummi auf Asphalt	$\mu_0 = 0,7 \div 0,8$

COULOMBSches Gleitreibungsgesetz: *Die Größe der (Gleit-) Reibungskraft R ist proportional zur Andrückkraft N*

$$|R| = \mu N$$

mit der (Gleit-) **Reibungszahl** $\mu > 0$.

Stahl auf Stahl	$\mu = 0,09$
Holz auf Holz	$\mu = 0,2 \div 0,4$
Holz auf Metall	$\mu = 0,4 \div 0,5$
Gummi auf Asphalt	$\mu = 0,5 \div 0,6$

Auflager

Lagerungen für ebene Tragwerke (Auswahl)

	Symbol	Reaktionskräfte
Pendelstütze (einwertig)		
Gleitlager (einwertig)		
gelenkiges Lager (zweiwertig)		
Parallelführung (zweiwertig)		
Schiebehülse (zweiwertig)		
Einspannung (dreiwertig)		

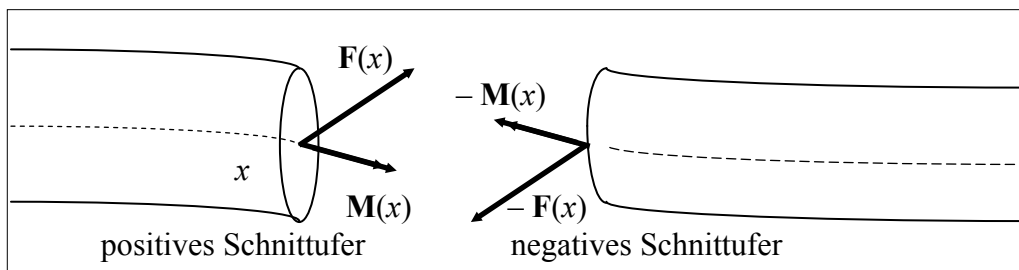
Lagerungen für räumliche Tragwerke (Auswahl)

	Symbol	Reaktionskräfte
Gleitlager (einwertig)		
gelenkiges Lager (dreiwertig)		
Loslager (vierwertig)		
Einspannung (sechswertig)		

Randbedingungen (ebener Fall)

		N	Q	M
freies Ende		0	0	0
gelenkiges Lager		0	$\neq 0$	0
		$\neq 0$	0	0
Parallelführung		$\neq 0$	0	$\neq 0$
Schiebehüls		0	$\neq 0$	$\neq 0$
Einspannung		$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

Schnittlasten an Stäben



Schnittkraft $\mathbf{F}(x) = F_x(x) \mathbf{e}_x + F_y(x) \mathbf{e}_y + F_z(x) \mathbf{e}_z$
 $= N(x) \mathbf{e}_x + Q_y(x) \mathbf{e}_y + Q_z(x) \mathbf{e}_z$

Schnittmoment $\mathbf{M}(x) = M_x(x) \mathbf{e}_x + M_y(x) \mathbf{e}_y + M_z(x) \mathbf{e}_z$

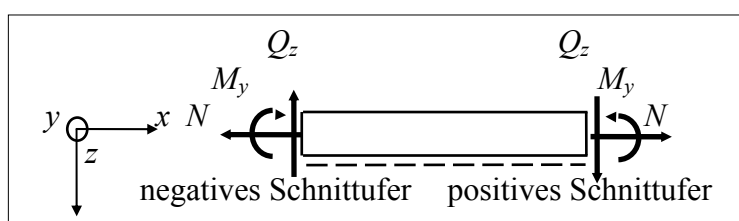
mit

- $N = F_x$ Normalkraft (-Komponente)
- $Q_y = F_y$ Querkraft (-Komponente) in y -Richtung
- $Q_z = F_z$ Querkraft (-Komponente) in z -Richtung
- M_x axiales oder Torsionsmoment
- M_y Biegemoment (-Komponente) in y -Richtung
- M_z Biegemoment (-Komponente) in z -Richtung.

ebenes Problem (x und z in die Zeichenebene)

- $N = F_x$ Normalkraft (-Komponente)
- $Q = F_z$ Querkraft (-Komponente) in z -Richtung
- $M = M_y$ Biegemoment (-Komponente) in y -Richtung.

Gestrichelte-Faser-Konvention dient zur Festlegung des Koordinatensystems



Merkregel: ein positives Biegemoment führt zu einer Stabkrümmung, die die gestrichelte Faser streckt.

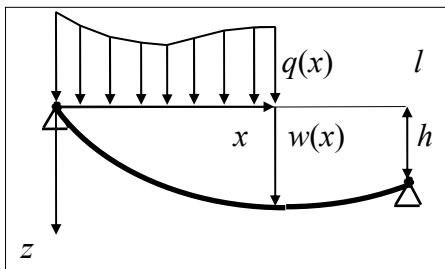
Schnittlasten-Differentialgleichungen

$$N(x)' = -n(x)$$

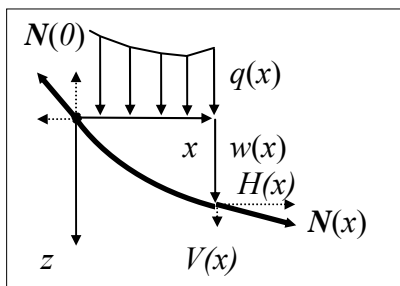
$$M_y(x)'' = Q_z(x)' = -q_z(x)$$

$$M_z(x)'' = -Q_y(x)' = q_y(x)$$

Seile und Bögen



Bogenlänge des Seils $L = \int_{\mathcal{L}} ds = \int_0^l \sqrt{[1 + w(x)'^2]} dx$



Seil-Differentialgleichungen

$$H(x) = H(0) \quad \text{also konstant}$$

$$V(x)' = -q(x)$$

$$w(x)'' = -\frac{q(x)}{H}$$

Seilreibung

$$S(\alpha)' = \mu_0 S(\alpha) \quad \text{Seil-Reibungs-Differentialgleichung}$$

$$S(\alpha) = S_0 e^{\mu_0 \alpha} \quad \text{allgemeine Lösung}$$

α : Umschlingungswinkel in Bogenmaß

Zug- und Druckstäbe

Normalspannung $\sigma(x) := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N(x)}{\Delta A(x)}$

Bemessung nach zulässiger Normalspannung

Stahl St37	$\sigma_{zul}^+ = 140 \div 180 \text{ MPa}$
Stahl St52	$\sigma_{zul}^+ = 210 \div 270 \text{ MPa}$
Spannstähle	$\sigma_{zul}^+ = \quad \div 900 \text{ MPa}$
Aluminium	$\sigma_{zul}^+ = 100 \text{ MPa}$
Kupfer	$\sigma_{zul}^+ = 40 \text{ MPa}$
Beton	$\sigma_{zul}^- = 8 \div 15 \text{ MPa}$
Holz in Faserrichtg.	$\sigma_{zul} = 6 \div 14 \text{ MPa}$

Längsdehnung $\varepsilon(x) := u(x)' = \frac{du(x)}{dx}$

HOOKEsches Gesetz $\sigma = E \varepsilon$

mit dem Elastizitätsmodul E von der Dimension [Spannung]

Eisen und Stahl	$E = 210 \text{ GPa}$
Aluminium	$E = 70 \text{ GPa}$
Kupfer	$E = 120 \text{ GPa}$
Messing	$E = 100 \text{ GPa}$
Nickel	$E = 200 \text{ GPa}$
Zinn	$E = 50 \text{ GPa}$
Glas	$E = 70 \text{ GPa}$
Beton	$E = 30 \text{ GPa}$
Holz	$E = 8 \div 16 \text{ GPa}$

(Durchschnittswerte bei Raumtemperatur) $\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$

Wärmedehnung $\varepsilon_T = \alpha \Delta\theta$

mit

ε_T	Wärmedehnung [dimensionslos]
$\Delta\theta$	Temperaturdifferenz [Kelvin K]
α	thermischer Ausdehnungskoeffizient [K^{-1}]

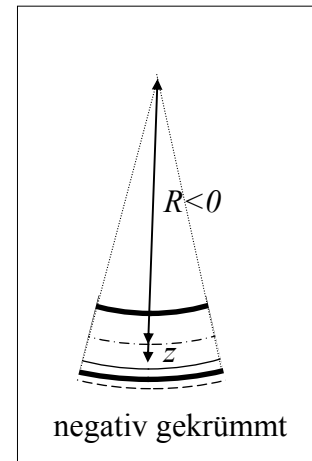
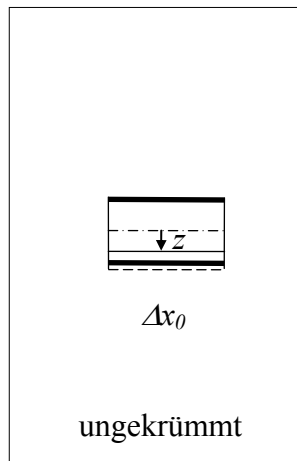
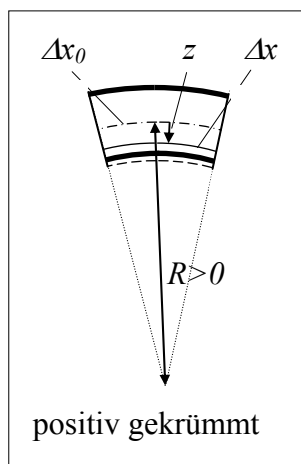
Aluminium	$\alpha = 23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Blei	$\alpha = 29,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Eisen, Stahl	$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Kupfer	$\alpha = 16,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Nickel	$\alpha = 12,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Stahl	$\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Zinn	$\alpha = 27 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Messing	$\alpha = 18 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Beton	$\alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Glas	$\alpha = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Keramik	$\alpha = 4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Holz	$\alpha = 3 \div 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

thermoelastisches Gesetz $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta\theta$ für Stäbe $u' = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta\theta$

Balkenbiegung

BERNOULLISCHE Hypothese

Die Balkenquerschnitte bleiben eben und senkrecht zur Balkenachse.



Beziehung zwischen Spannung und Biegemoment

$$\sigma(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z$$

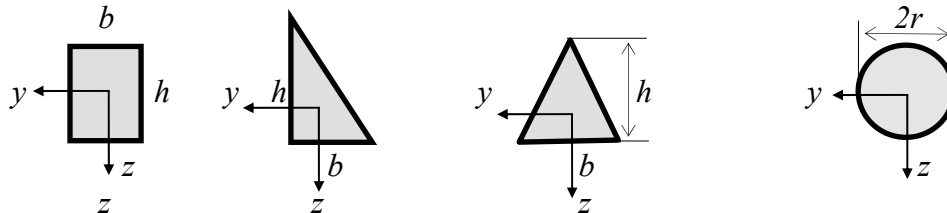
Biegelinien-Differentialgleichung

$$M_y(x) = -E(x) I_y(x) w(x)''$$

Flächenträgheitsmomente

- axiale Trägheitsmomente $I_y := \int_{\mathcal{A}} z^2 dA$ $I_z := \int_{\mathcal{A}} y^2 dA$
- Deviationsmomente $I_{yz} := I_{zy} := - \int_{\mathcal{A}} y z dA$

Beispiele (bezogen auf Flächenmittelpunkte):



Rechteckquerschnitt

$$I_y = \frac{b h^3}{12} \quad I_z = \frac{h b^3}{12} \quad I_{yz} = 0$$

rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt

$$I_y = \frac{b h^3}{36} \quad I_z = \frac{h b^3}{36} \quad I_{yz} = \frac{h^2 b^2}{72}$$

gleichschenkliger Dreiecksquerschnitt

$$I_y = \frac{b h^3}{36} \quad I_z = \frac{b^3 h}{48} \quad I_{yz} = 0$$

Kreisquerschnitt

$$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4} \quad I_{yz} = 0$$

Superpositionsprinzip der Verschiebungen für linear-elastische Systeme

Die Verschiebungen $u(x)$ und $w(x)$ in jedem Punkt infolge einer Kombination von Lasten sind gleich der Summe der Verschiebungen infolge jeder einzelnen Last.

Proportionalität für linear-elastische Systeme

Die α -fache Last bewirkt die α -fachen Verschiebungen $\alpha u(x)$ und $\alpha w(x)$.

Prinzip von de SAINT-VENANT

In hinreichender Entfernung vom Angriffsbereich eines Lastsystems hängt dessen Wirkung auf die mechanischen Größen nur noch von dessen statisch Resultierenden ab.

Satz von STEINER

Die Trägheitsmomente des Gesamtquerschnitts ergeben sich aus denjenigen der Teilquerschnitte gemäß

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{yi} + z_{0i}^2 A_i)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n (I_{zi} + y_{0i}^2 A_i)$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n (I_{yzi} - y_{0i} z_{0i} A_i)$$

mit

$$\begin{aligned} \{y_{0i}, z_{0i}\} & \quad \text{Koordinaten des Teilschwerpunktes } S_i \text{ von } \mathcal{A}_i \text{ bez. } S \\ A_i & \quad \text{Flächeninhalt des Teilquerschnitts } \mathcal{A}_i \\ I_{yi} &= \int_{\mathcal{A}_i} z_i^2 dA \quad \text{Trägheitsmomente der Teilquerschnitte } \mathcal{A}_i \\ I_{zi} &= \int_{\mathcal{A}_i} y_i^2 dA \quad \text{bezogen auf deren} \\ I_{yzi} &= - \int_{\mathcal{A}_i} y_i z_i dA \quad \text{Flächenschwerpunkte} \end{aligned}$$

Transformationsformeln bei Koordinatendrehung

$$\begin{aligned} y &= r \cos \varphi + s \sin \varphi \\ z &= -r \sin \varphi + s \cos \varphi \\ I_y &= \frac{1}{2} (I_r + I_s) + \frac{1}{2} (I_r - I_s) \cos 2\varphi + I_{rs} \sin 2\varphi \\ I_z &= \frac{1}{2} (I_r + I_s) - \frac{1}{2} (I_r - I_s) \cos 2\varphi - I_{rs} \sin 2\varphi \\ I_{yz} &= -\frac{1}{2} (I_r - I_s) \sin 2\varphi + I_{rs} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Definition: KOO-Achsen, bezüglich derer $I_{yz} = 0$ ist, heißen **Hauptträgheitsachsen** (HTA) des Querschnitts.

Hauptträgheitsachsen lassen sich für jeden Querschnitt finden.

Achsen, die senkrecht auf Hauptträgheitsachsen stehen, sind ebenfalls Hauptträgheitsachsen.

Der Winkel zwischen einem beliebigen KOOS $\{x, r, s\}$ und Hauptträgheitsachsen ist

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{rs}}{I_r - I_s}$$

Hauptträgheitsmomente $I_{1,2}^H = \frac{1}{2} (I_r + I_s) \pm \left\{ \frac{1}{4} (I_r - I_s)^2 + I_{rs}^2 \right\}^{1/2}$

Schiefe Biegung

Biegelinien-Differentialgleichungen

$$M_y = E I_{yz} v'' - E I_y w''$$

$$M_z = E I_z v'' - E I_{yz} w''$$

oder äquivalent
$$E v'' = \frac{-M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_{yz}^2 - I_y I_z} \quad E w'' = \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_{yz}^2 - I_y I_z}$$

Normalspannungen im Querschnitt
$$\sigma(x, y, z) = \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz})y - (M_y I_z - M_z I_{yz})z}{I_{yz}^2 - I_y I_z}$$

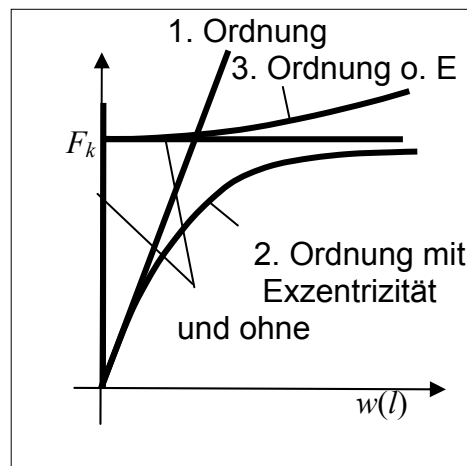
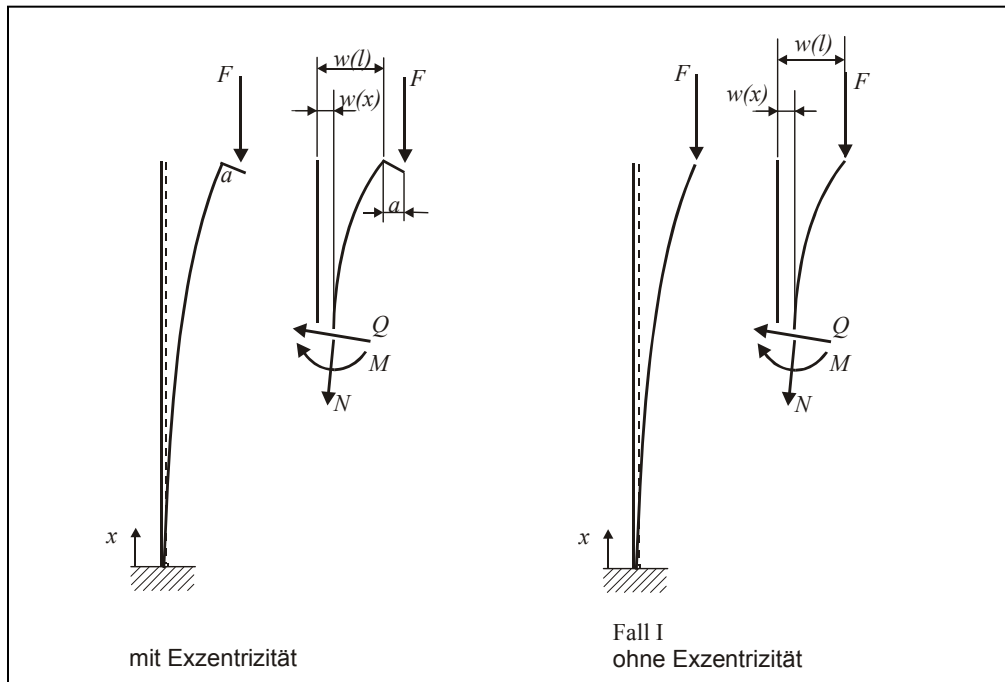
Bezüglich Hauptträgheitsachsen ($I_{yz} \equiv 0$) gelten

$$M_y = -E I_y^H w'' \quad M_z = E I_z^H v''$$

und

$$\sigma(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y^H} z - \frac{M_z(x)}{I_z^H} y$$

Knickstäbe

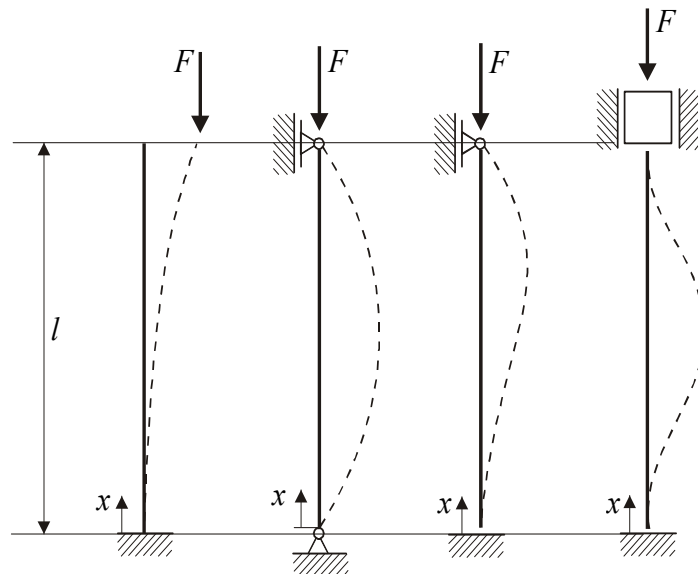


kleinste kritische Last

$$F_k = \frac{EI}{l^2} \cdot \alpha = \frac{\pi^2 EI}{l_{red}^2}$$

mit der **reduzierten Knicklänge**

$$l_{red} = \frac{\pi l}{\sqrt{\alpha}}$$



	Fall I	Fall II	Fall III	Fall IV
EULER-Fall				
$F_k =$	$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{20,19 EI}{l^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$
$\alpha =$	$\frac{\pi^2}{4}$	π^2	transz.	$4\pi^2$
$\alpha \approx$	2,46	9,87	20,19	39,48
$\frac{l_{red}}{l} =$	2	1	$\approx 0,7$	1/2

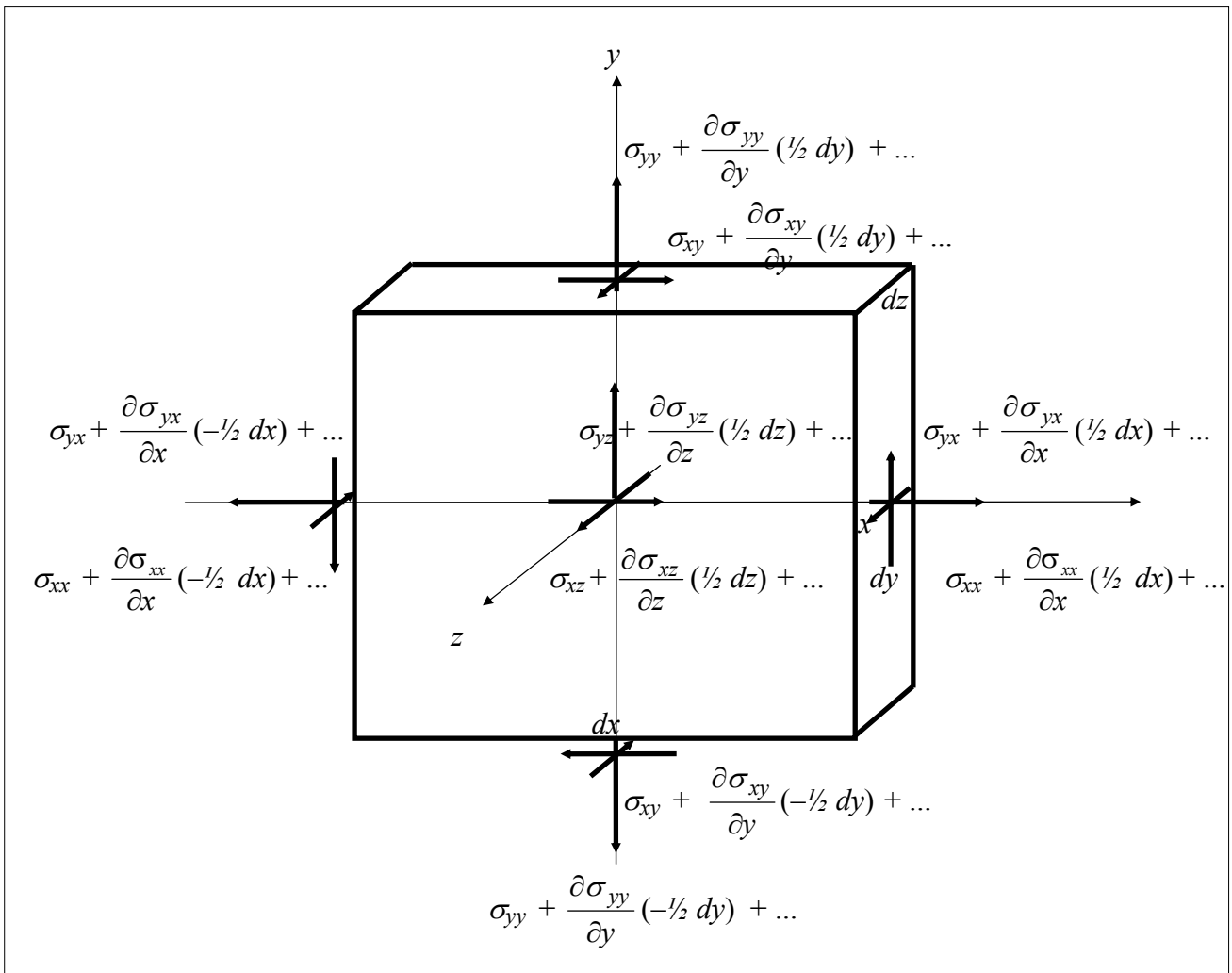
Spannungs-Analyse

Spannungsmatrix $\mathbf{S} := \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Spur der Spannungsmatrix $s := \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$

BOLTZMANNsches Axiom: Die Schubspannungen in einer j -Fläche in i -Richtung sind gleich den Schubspannungen in einer i -Fläche in j -Richtung.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \qquad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$



lokale Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^M \rho = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^M \rho = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^M \rho = 0$$

ebene Koordinaten-Transformation

$$dx = d\eta \sin \varphi$$

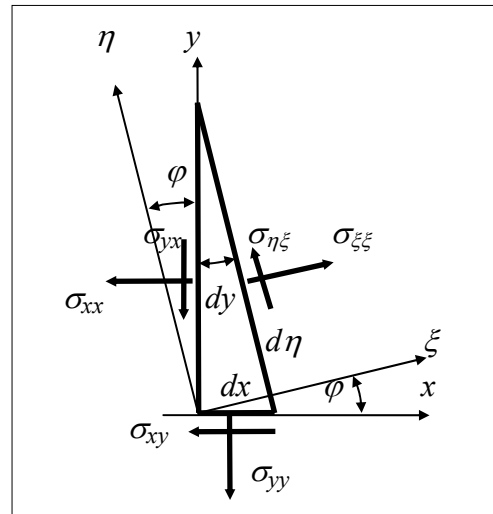
$$dy = d\eta \cos \varphi$$

$$dz = d\zeta$$

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_\xi - \sin \varphi \mathbf{e}_\eta$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_\xi + \cos \varphi \mathbf{e}_\eta$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\zeta$$



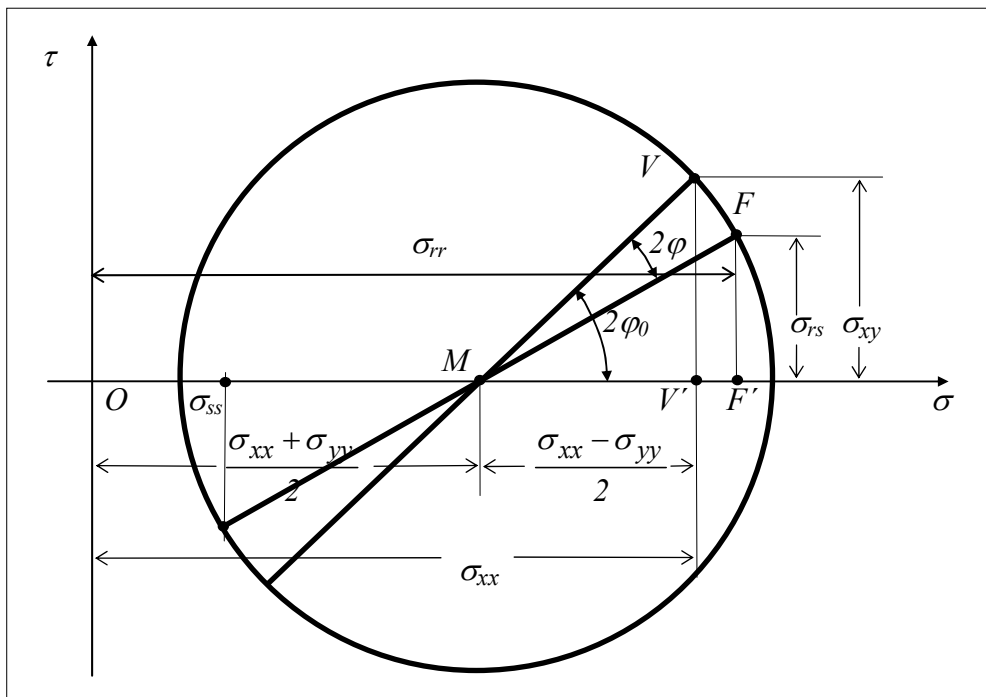
Transformations-Formeln des ebenen Spannungszustandes bei KOO-Drehung

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\varphi) + \sigma_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\varphi) - \sigma_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\sigma_{\eta\xi} = \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin(2\varphi) + \sigma_{xy} \cos(2\varphi)$$

MOHRscher Kreis



Kreismittelpunkts-KOO $\tau_M = 0 ; \sigma_M = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$

Radius
$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

Hauptspannungen
$$\sigma_{\xi\xi}^H, \sigma_{\eta\eta}^H = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

Winkel mit HSA
$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

extremale Schubspannungen
$$\tau_{extr.} = \pm r$$

Deformationsgeometrie

Deformationen

$$\varepsilon_{xx} := \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} := \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} := \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Dehnungsmatrix
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Spur der Dehnungsmatrix
$$e := \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

ebener Verzerrungszustand in x-y-Ebene
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Transformations-Formeln des ebenen Deformationszustandes bei KOO-Drehung

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos(2\varphi) + \varepsilon_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos(2\varphi) - \varepsilon_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\varepsilon_{\eta\xi} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \sin(2\varphi) + \varepsilon_{xy} \cos(2\varphi)$$

Elastizitätstheorie

thermoelastisches HOOKEsches Gesetz

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{zz} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx}\end{aligned}$$

inverses HOOKEsches Gesetz

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \right] \\ \sigma_{yy} &= 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \right] \\ \sigma_{zz} &= 2G \left[\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \right] \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \quad \sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} \quad \sigma_{yz} = 2G \varepsilon_{yz}\end{aligned}$$

Querkontraktionszahl (dimensionslos) $\nu := -\frac{\varepsilon_{\text{quer}}}{\varepsilon_{\text{längs}}}$

Stahl	$\nu = 0,34$
Aluminium	$\nu = 0,32 \div 0,35$
Kupfer	$\nu = 0,33 \div 0,36$
Glas	$\nu = 0,21 \div 0,27$
Gummi	$\nu = 0,49 \div 0,5$

Schubmodul $G := \frac{E}{2(1+\nu)}$ Kompressionsmodul $K := \frac{E}{3(1-2\nu)}$

spezifische **elastische Energie** für HOOKEsches Material

$$\begin{aligned}w(\varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2} \left\{ 2G \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \varepsilon_{11} \right. \\ &\quad + 2G \left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \varepsilon_{22} \\ &\quad + 2G \left[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \varepsilon_{33} \\ &\quad \left. + 2G [\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{32}^2 + \varepsilon_{13}^2] \right\}\end{aligned}$$

Zerlegung der Energie $w = w_K + w_G$

- in Kompressions- oder Dilatationsenergie

$$w_K = -\frac{1}{2} p e = \frac{1}{6} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

- und Gestaltänderungsenergie

$$\begin{aligned} w_G &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{4G} \sum_{i,j=1}^3 \sigma'^2_{ij} \quad (\text{Deviatorspannungen}) \\ &= \frac{1}{12G} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] \end{aligned}$$

Federenergie $W = \frac{1}{2} c x^2 \Rightarrow F = c x = \frac{dW}{dx} \Rightarrow L_i = \dot{W} = \frac{dW}{dx} \dot{x} = F \dot{x}$

Formänderungsenergie des Biegebalkens ohne Schub

$$W = \int_0^L \frac{1}{2} E (A u'^2 + I_y w''^2 + I_z v''^2) dx = \int_0^L \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M_y^2}{I_y} + \frac{M_z^2}{I_z} \right) dx$$

mit der

- Dehnungsenergie $\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \int_0^L N u' dx = \frac{1}{2} \int_0^L E A u'^2 dx$

- Biegeenergie $\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx = -\frac{1}{2} \int_0^L M_y w'' dx = \frac{1}{2} \int_0^L E I_y w''^2 dx$

- Biegeenergie $\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \int_0^L M_z v'' dx = \frac{1}{2} \int_0^L E I_z v''^2 dx$

Schubspannungen am Balken bei ebener Biegung

$$\tau_{zx}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_y(z)}{I_y b(z)}$$

mit dem statischem Moment

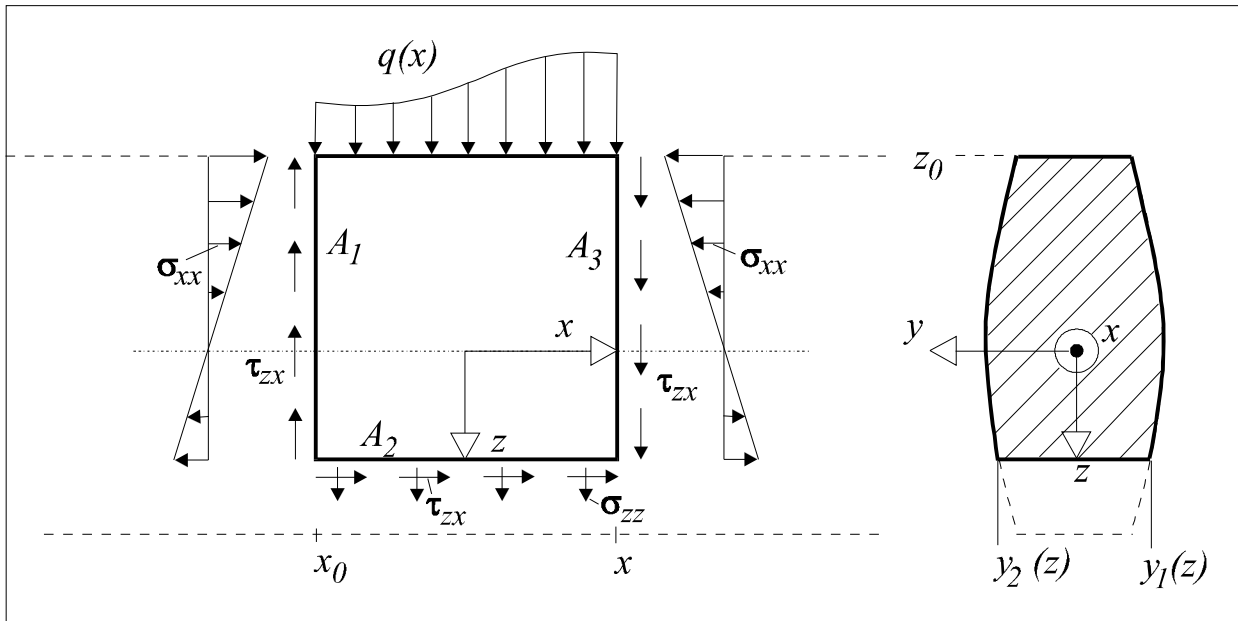
$$S_y(z) := - \int_{\mathcal{A}_3} \underline{z} dA = - \int_{z_0}^z \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z} = \int_z^{z_0} \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z}$$

Schubspannungsverteilung am Rechteckvollquerschnitt mit Höhe h

$$\tau_{zx}(x, z) = \frac{3 Q_z(x)}{2A} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$

und am Vollkreisquerschnitt mit Radius R

$$\tau_{zx}(x, z) = \frac{4 Q_z(x)}{3A} \left[1 - \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right]$$



spez. Scherenergie $w = \frac{1}{2} (\tau_{xz} \varepsilon_{xz} + \tau_{zx} \varepsilon_{zx}) = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} \tau^2 / G$

Scherenergie des Stabes $W = \int_{\gamma} w dV = \frac{\beta}{2G A} \int_{x=0}^L Q_z^2 dx$

mit der dimensionslosen Formzahl $\beta := \frac{A}{I_y^2} \int_{\mathcal{A}} \frac{S_y(z)^2}{b(z)^2} dA$

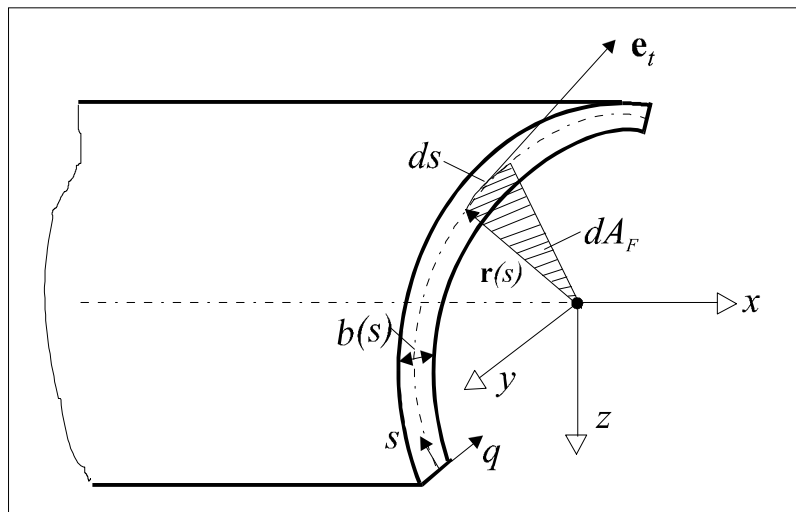
$\beta = 6/5$ für Rechteckquerschnitte

$\beta = 10/9$ für Kreisquerschnitte

Schubmittelpunkt $y_s = \frac{2}{I_y} \int_0^{s_I} A_F(s) b(s) z(s) ds$ $z_s = -\frac{2}{I_z} \int_0^{s_I} A_F(s) b(s) y(s) ds$

mit $A_F(s) := \int_0^s \frac{1}{2} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}(s) \times \mathbf{e}_t(s) ds$

Satz: Greift die Resultierende der äußeren Kräfte an einer Stelle x des Stabes im Schubmittelpunkt an, so erzeugt sie keine Torsion.



DE SAINT-VENANTschen Torsionstheorie

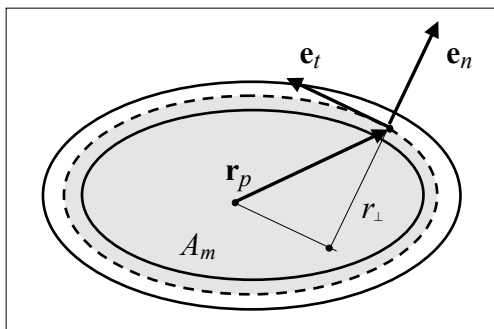
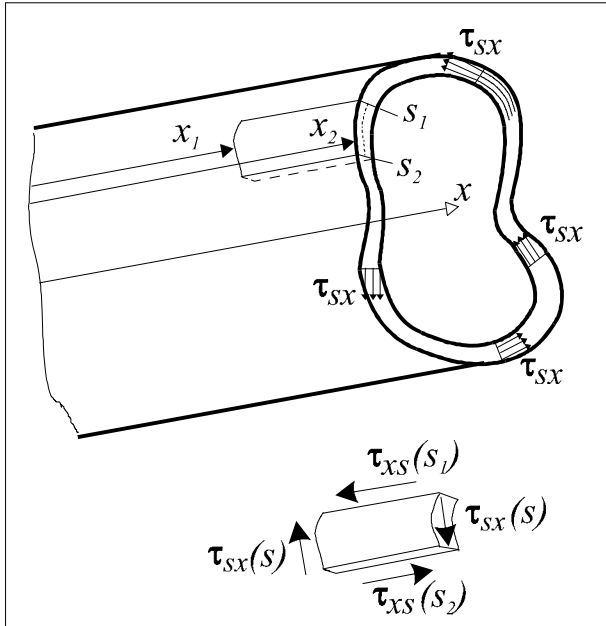
ϑ : Torsions- oder Drillwinkel

planare Verschiebungen

$$v = -z \vartheta(x) \quad w = y \vartheta(x)$$

Drillung $D := \vartheta' = \frac{d\vartheta}{dx}$

BREDT'sche Torsionstheorie für einzellige Hohlstäbe mit dünnen Wänden



Schubfluss $t := \tau_{sx}(s) b(s)$

1. BREDT'sche Formel $\tau_{sx}(s) = \tau_{xs}(s) = \frac{M_t}{2 A_m b(s)}$ mit $A_m := 1/2 \oint r_{\perp} ds$

2. BREDT'sche Formel $\vartheta' = \frac{M_t}{G I_t}$ mit dem Torsionsflächenmoment $I_t := \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}}$

dickwandige und Vollprofile

$$dM_t = G D dI_t \quad \text{mit} \quad dI_t := \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{db}} \quad \tau_{xs} = \frac{dM_t}{2 A_m db}$$

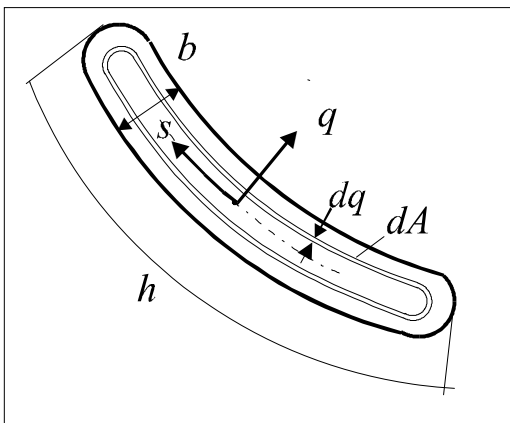
$$M_t = \int_{\mathcal{A}} dM_t = G D \int_{\mathcal{A}} dI_t = G D I_t \quad \text{mit} \quad I_t = \int_{\mathcal{A}} dI_t$$

Kreisquerschnitte
$$I_t = \int_{\mathcal{A}} dI_t = \int_{r_i}^{r_a} 2 \pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} (r_a^4 - r_i^4)$$

Drillung für Kreisquerschnitte
$$D = \frac{2 M_t}{\pi (r_a^4 - r_i^4) G}$$

Schubspannungen für Kreisquerschnitte
$$\tau_{xs} = \frac{M_t}{I_t} r$$

dünnwandige Vollquerschnitte mit parallelen Rändern



$$A_m \approx 2 q h \quad I_t = \frac{b^3 h}{3} \quad D = \frac{3 M_t}{G b^3 h}$$

$$\tau_{xs} = 2 G D q = 6 \frac{M_t}{b^3 h} q = \frac{2 M_t}{I_t} q$$

zusammengesetzte dünnwandige Vollquerschnitte

$$M_t = G D I_t \quad \text{mit} \quad I_t = I_{t1} + I_{t2} + \dots + I_{tn}$$

spez. Torsionsenergie für dünnwandige Hohlquerschnitte
$$w = \frac{M_t^2}{8 G A_m^2 b^2}$$

globale Torsionsenergie des Torsionsstabes zwischen x_1 und x_2 für dünnwandige Hohlquerschnitte und für dünnwandige Vollquerschnitte mit parallelen Rändern

$$W = \int_{\mathcal{V}} w dV = \frac{1}{2} M_t D (x_2 - x_1)$$

Festigkeits-Hypothesen

- Normalspannungs-Hypothese

$$\sigma_{zul}^- \leq \sigma_{max} \leq \sigma_{zul}^+$$

- Schubspannungs-Hypothese

$$\tau_{max} \leq \tau_{zul}$$

- Formänderungsenergie-Hypothese

$$w_{max} \leq w_{zul}$$

- Gestaltänderungsenergie-Hypothese

$$w_{G max} \leq w_{G zul} \quad \Rightarrow \quad |\sigma| \leq \sqrt{6 G w_{G zul}} \quad \text{bei einachsigem Zug}$$

Kinematik der Punktbewegungen

Bahn eines (bewegten) Punktes P $\mathbf{r}(t) := \vec{OP} = x_1(t) \mathbf{e}_1 + x_2(t) \mathbf{e}_2 + x_3(t) \mathbf{e}_3$

Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) := \mathbf{r}(t)^\bullet = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = x_1(t)^\bullet \mathbf{e}_1 + x_2(t)^\bullet \mathbf{e}_2 + x_3(t)^\bullet \mathbf{e}_3$

Beschleunigung $\mathbf{a}(t) := \mathbf{v}(t)^\bullet = \mathbf{r}(t)^\bullet\bullet = x_1(t)^\bullet\bullet \mathbf{e}_1 + x_2(t)^\bullet\bullet \mathbf{e}_2 + x_3(t)^\bullet\bullet \mathbf{e}_3$

Bogenlänge $s \Big|_{t_0}^t := \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$

Zerlegung der Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_t(t) + \mathbf{a}_n(t)$

in Tangentialbeschleunigung $\mathbf{a}_t(t) := (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_t) \mathbf{e}_t = s^\bullet\bullet \mathbf{e}_t = v^\bullet \mathbf{e}_t$

und Normal- oder Zentripetalbeschleunigung $\mathbf{a}_n(t) := \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_t(t) = \frac{s^\bullet\bullet}{\rho} \mathbf{e}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n$

Normalen(einheits)vektor $\mathbf{e}_n(t) := \frac{\mathbf{a}_n}{|\mathbf{a}_n|}$

Binormalen(einheits)vektor $\mathbf{e}_b(t) := \mathbf{e}_t(t) \times \mathbf{e}_n(t)$

Krümmung der Bahnkurve $\hat{\kappa}(s) := \left| \hat{\mathbf{e}}_t' \right| = \left| \frac{d\hat{\mathbf{e}}_t(s)}{ds} \right|$

Krümmungsradius $\hat{\rho}(s) := \frac{1}{\hat{\kappa}(s)} = \frac{1}{|\hat{\mathbf{e}}_t'|}$

Zylinderkoordinaten $\{r, \varphi, z\}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cos \varphi$$

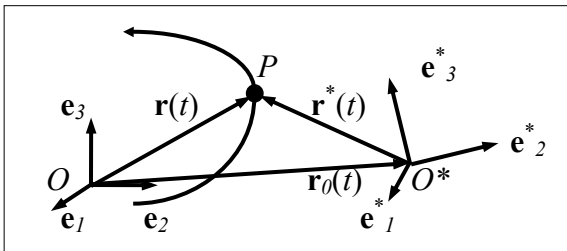
$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \qquad y = r \sin \varphi$$

Ortsvektor $\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(\varphi(t)) + z(t) \mathbf{e}_z$

Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = r^\bullet \mathbf{e}_r + r \varphi^\bullet \mathbf{e}_\varphi + z^\bullet \mathbf{e}_z$

Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = (r^\bullet\bullet - r \varphi^\bullet\bullet) \mathbf{e}_r + (2r^\bullet \varphi^\bullet + r \varphi^\bullet\bullet) \mathbf{e}_\varphi + z^\bullet\bullet \mathbf{e}_z$

Relativbewegung



(Absolut-) Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_f$

mit Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_r := \sum_{i=1}^3 x_i^* \dot{\mathbf{e}}_i^*$

und Führungsgeschwindigkeit des bewegten BZS

$$\mathbf{v}_f := \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*$$

(Absolut-) Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_f + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r$

mit

- Führungsbeschleunigung $\mathbf{a}_f := \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*)$
(Translations- + Quer- + Zentripetalbeschleunigung)
- CORIOLIS-Beschleunigung $\mathbf{a}_c := 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$
- Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_r := \sum_{i=1}^3 x_i^* \ddot{\mathbf{e}}_i^*$

Kinetik des starren Körpers

Seien O raumfester und P, Q körperfeste Punkte

Ortsvektor $\vec{r}_P = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{x}$

EULERSche Geschwindigkeitsformel

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \vec{QP}$$

$\boldsymbol{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit

Beschleunigung $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$

mit \mathbf{a}_Q Bezugsbeschleunigung

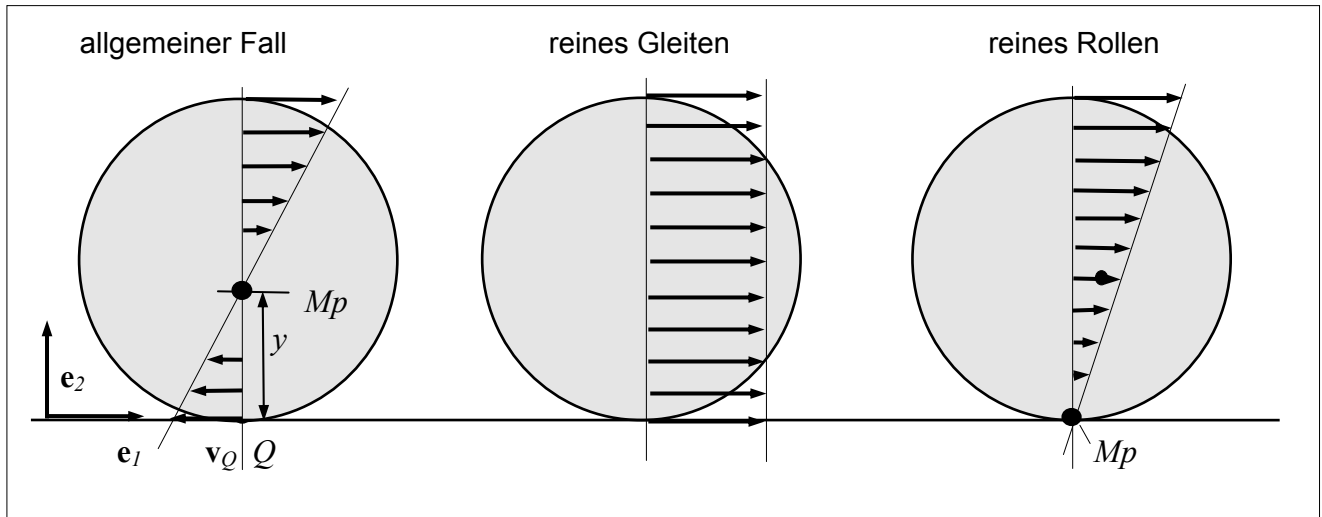
$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}$ Winkelbeschleunigung

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ Zentripetalschleunigung

Definition: Ein Punkt M_p mit $\mathbf{v}_{M_p} \equiv \mathbf{0}$ heißt **Momentanpol** (Momentanzentrum).

Satz vom Momentanpol: Das Geschwindigkeitsfeld eines starren Körpers bei einer ebenen Bewegung läßt sich zu jedem Zeitpunkt als Rotation um einen Punkt M_p , den Momentanpol, auffassen, falls $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, gemäß

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}.$$



Massenträgheitsmomente

axiale $\Theta_{11} := \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2) dm = \int_{\mathcal{V}} r_{\perp 1}^2 dm$ mit $r_{\perp 1} := \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)}$

$$\Theta_{22} := \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_3^2) dm = \int_{\mathcal{V}} r_{\perp 2}^2 dm \quad \text{mit} \quad r_{\perp 2} := \sqrt{(x_3^2 + x_1^2)}$$

$$\Theta_{33} := \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2) dm = \int_{\mathcal{V}} r_{\perp 3}^2 dm \quad \text{mit} \quad r_{\perp 3} := \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$$

deviatorische $\Theta_{12} := - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_2 dm =: \Theta_{21}$

$$\Theta_{23} := - \int_{\mathcal{V}} x_2 x_3 dm =: \Theta_{32}$$

$$\Theta_{13} := - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_3 dm =: \Theta_{31}$$

Beispiele

- Quader mit konstanter Massendichte ρ und Seitenlängen a, b, c in den Richtungen 1, 2, 3

$$\Theta_{11} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2) \quad \Theta_{12} = \Theta_{23} = \Theta_{13} = 0$$

- Kreisringzylinder mit Länge l , Außenradius r_a , Innenradius r_i

$$\Theta_{axial} = \frac{m}{2} (r_a^2 + r_i^2)$$

$$\Theta_{quer} = \frac{m}{4} (r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2)$$

- schlanker Stab der Länge l mit Achsenrichtung in x

$$\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \frac{m}{12} l^2 \quad \Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{xz} = 0$$

- dünne Kreisscheibe mit Radius r und x senkrecht zur Scheibe

$$\Theta_{xx} = \frac{m}{2} r^2 \quad \Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \frac{m}{4} r^2 \quad \Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{xz} = 0$$

- Hohlkugel mit Außenradius r_a , Innenradius r_i

$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \frac{2m(r_a^5 - r_i^5)}{5(r_a^3 - r_i^3)} \quad \Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{xz} = 0$$

STEINERsche Gleichungen

$$\Theta_{0ii} = r_{\perp i}^2 m + \Theta_{Mii}$$

$$\Theta_{0ij} = -r_{Mi} r_{Mj} m + \Theta_{Mij} \quad \text{für } i \neq j$$

EULERsche Kreiselgleichungen bezogen auf Massenmittelpunkt und körperfestes System

$$\begin{aligned} M_1 &= \Theta_{11} \dot{\omega}_1 + \Theta_{12} \dot{\omega}_2 + \Theta_{13} \dot{\omega}_3 \\ &\quad - (\Theta_{12} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) \omega_3 + (\Theta_{13} \omega_1 + \Theta_{23} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) \omega_2 \\ M_2 &= \Theta_{12} \dot{\omega}_1 + \Theta_{22} \dot{\omega}_2 + \Theta_{23} \dot{\omega}_3 \\ &\quad + (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) \omega_3 - (\Theta_{13} \omega_1 + \Theta_{23} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) \omega_1 \\ M_3 &= \Theta_{13} \dot{\omega}_1 + \Theta_{23} \dot{\omega}_2 + \Theta_{33} \dot{\omega}_3 \\ &\quad - (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) \omega_2 + (\Theta_{12} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) \omega_1 \end{aligned}$$

EULERsche Kreiselgleichungen bezogen auf Massenmittelpunkt und HTA

$$M_{R1} = \Theta^H_{11} \dot{\omega}_1 + (\Theta^H_{33} - \Theta^H_{22}) \omega_2 \omega_3$$

$$M_{R2} = \Theta^H_{22} \dot{\omega}_2 + (\Theta^H_{11} - \Theta^H_{33}) \omega_3 \omega_1$$

$$M_{R3} = \Theta^H_{33} \dot{\omega}_3 + (\Theta^H_{22} - \Theta^H_{11}) \omega_1 \omega_2$$

kinetische Energie des starren Körpers

$$K = K_{trans} + K_{rot} \quad (\text{translatorisch} + \text{rotatorisch})$$

mit $K_{trans} := \frac{1}{2} \mathbf{v}_M^2 m$

$$K_{rot} := -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_V [(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \mathbf{x}^2] dm = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \Theta_{Mij} \omega_j$$

Definition: Als Anzahl der **Freiheitsgrade** eines kinematischen Systems bezeichnet man die Mindestanzahl von skalaren Größen, die die Lage des Systems determinieren.

Ein Punkt besitzt

- im Raum 3 Freiheitsgrade
- auf einer Fläche 2 Freiheitsgrade
- auf einer Bahnkurve 1 Freiheitsgrad

Der starre Körper besitzt

- im Raum 6 Freiheitsgrade
- in der Ebene 3 Freiheitsgrade
- bei der Drehung um einen festen Punkt 3 Freiheitsgrade

- bei der Drehung um eine feste Achse 1 Freiheitsgrad

Ein deformierbarer Körper hat unendlich viele Freiheitsgrade.

Kinetik deformierbarer Körper

Definition: Der **Impuls** des Körpers zur Zeit t ist

$$\mathbf{p}(t) := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}(P, t) dm .$$

Definition: Der **Drall** (Drehimpuls) des Körpers zur Zeit t bez. eines Bezugspunktes O ist

$$\mathbf{d}_O(t) := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O(P, t) \times \mathbf{r}_O(P, t)^\bullet dm .$$

Definition: Die **kinetische Energie** des deformierbaren Körpers ist

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^{\bullet 2} dm = \frac{1}{2} \mathbf{v}_M^2 m + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}^{\bullet 2} dm .$$

Impuls-Bilanz: Die zeitliche Änderung des Impulses \mathbf{p} eines Körpers bezüglich eines raumfesten Bezugssystems ist gleich der resultierend auf ihn wirkenden Kraft \mathbf{F}

$$\mathbf{p}^\bullet = \mathbf{F} .$$

Drall-Bilanz: Die zeitliche Änderung des Dralls \mathbf{d}_O eines Körpers bezüglich eines raumfesten Bezugssystems mit Bezugspunkt O ist gleich dem resultierend auf ihn wirkenden Moment \mathbf{M}_O bezüglich O

$$\mathbf{d}_O^\bullet = \mathbf{M}_O .$$

lokale Form der **Impuls-Bilanz**

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x^M = \rho a_x$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_y^M = \rho a_y$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z^M = \rho a_z$$

lokale Form der **Drall-Bilanz** (BOLTZMANNsches Axiom)

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Leistung

Leistung der äußeren Kräfte

$$L_a := \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}^A \cdot \mathbf{v} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^M \cdot \mathbf{v} dm + \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^L \mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\omega}$$

- mit
- \mathbf{f}^A oberflächenverteilte Kraft
 - \mathbf{f}^M massenverteilte Kraft
 - \mathbf{F}_i Einzelkräfte (am starren Körper)
 - \mathbf{M}_i Einzelmomente (am starren Körper)

Leistung der (inneren) Spannungen $L_i := \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{\bullet} dV$

Leistungs-Bilanz: Für jeden Körper gilt

$$L_a = L_i + K^{\bullet}$$

Arbeit

Arbeit der äußeren Kräfte $A_a := \int_{t_0}^{t_1} L_a dt \quad \Leftrightarrow \quad L_a = A_a^{\bullet}$

äußere Ergänzungsarbeit $A_a^* := \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{F}$

Für konservative Kräfte \mathbf{F} gibt es ein Potential $U(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad L_a = -U^{\bullet}$$

Potential der Gewichtskraft: die potentielle Energie der Gravitation

$$U = m g h \quad h \text{ Höhe über Nullniveau}$$

Spannungsarbeit $A_i := \int_{t_0}^{t_1} L_i dt \quad \Leftrightarrow \quad A_i^{\bullet} = L_i$

Arbeits-Bilanz: Während der Bewegung eines Körpers in einen beliebigen Zeitintervall $[t_0, t_1]$ gilt die Arbeitsbilanz

$$A_a = A_i + \Delta K$$

mit $A_a = \int_{t_0}^{t_1} L_a dt \quad \text{Arbeit der äußeren Kräfte}$

$$A_i = \int_{t_0}^{t_1} L_i dt \quad \text{Spannungsarbeit}$$

$$\Delta K = K(t_1) - K(t_0) \quad \text{Differenz der kinetischen Energie.}$$

Energie-Bilanz: Bei konservativen Systemen ist die Summe der potentiellen Energie der äußeren Kräfte, der elastischen Energie und der kinetischen Energie konstant

$$U + W + K = \text{konstant.}$$

Variationsprinzip der Mechanik

Prinzip der virtuellen Leistung ($PdvL$)

Für einen Körper sind die Bewegungsgesetze genau dann erfüllt, wenn die virtuelle Leistungsbilanz

$$\delta L_{av} = \delta L_i$$

für alle virtuellen Geschwindigkeitsfelder $\delta \mathbf{v}$ erfüllt ist mit

- der virtuellen Leistung der äußeren verlorenen Kräfte

$$\delta L_{av} := \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}^A \cdot \delta \mathbf{v} dA + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f}^M - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{v} dm$$

- und der virtuellen Leistung der Spannung

$$\delta L_i := \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\delta v_k)}{\partial x_i} \right) dV.$$

Die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte von starren Körpern bei ebener Bewegung um eine HTA ist bezüglich des Massenmittelpunktes M

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} dm = \mathbf{a}_M \cdot \delta \mathbf{v}_M m + \Theta_M \omega^\bullet \delta \omega.$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen ($PdvV$)

Für einen Körper sind die Gleichgewichtsbedingungen genau dann erfüllt, wenn die virtuelle Arbeitsbilanz

$$\delta A_a = \delta A_i$$

für alle Vektorfelder $\delta \mathbf{u}$, den virtuellen Verrückungen, erfüllt ist mit

- dem virtuellen Arbeitsinkrement der äußeren Kräfte

$$\delta A_a := \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}^A \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^M \cdot \delta \mathbf{u} dm$$

- und dem virtuellen Arbeitsinkrement der Spannungen

$$\delta A_i := \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_i} \right) dV.$$

Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie

Ein konservatives System mit Potential U der äußeren Kräfte und Potential W der Spannungen befindet sich genau dann im Gleichgewicht, wenn die Variation des Gesamtpotentials

$$\delta(W + U) := \delta W + \delta U = 0$$

ist für alle virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{u}$.

HALMILTONsches Prinzip vom stationären Wert der LAGRANGE-Funktion

Die Bewegungsgleichungen eines konservativen Systems sind für eine Bewegung im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ genau dann erfüllt, wenn

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt = 0$$

ist für alle virtuellen Bewegungen $\delta \mathbf{u}$, die den Anfangs-, End- und Rand-Bedingungen genügen, mit der LAGRANGE-Funktion

$$\mathcal{L} := K - U - W.$$

LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen 2. Art

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

oder mit generalisierten Kräften

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^R = \frac{\partial(U+W)}{\partial q_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Voraussetzungen für das Folgende: Statische und isotherme Probleme von linear-elastischen Körpern unter Einzellasten, die in Richtung konstant sind.

Definition: Die **Einflusszahl** α_{ij} ist die Größe der Verschiebung des Kraftangriffspunktes \mathbf{r}_i der Kraft \mathbf{F}_i in deren Sinne (Richtung) infolge einer Einskraft $F_j \equiv 1$ an der Stelle \mathbf{r}_j .

Vertauschungssatz von MAXWELL und BETTI

Eine Kraft $(\mathbf{F}_i, \mathbf{r}_i)$ von der Größe 1 bewirkt eine Verschiebung von \mathbf{r}_j im Sinne einer Kraft $(\mathbf{F}_j, \mathbf{r}_j)$ von derselben Größe wie umgekehrt.

1. Satz von CASTIGLIANO

Die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der Einzelverschiebung u_i im Sinne einer Kraft \mathbf{F}_i ergibt deren Betrag F_i

$$F_i = \frac{\partial W(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

2. Satz von CASTIGLIANO

Drückt man die Formänderungsenergie durch die Kraftbeträge F_1, \dots, F_n aus, so ist deren partielle Ableitung nach einem F_i die Verschiebung von deren Angriffspunkt im Sinne von \mathbf{F}

$$u_i = \frac{\partial W(F_1, \dots, F_n)}{\partial F_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

CASTIGLIANOsche Beziehungen gelten analog für Einzelmomente

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad M_i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i}$$

Stoßvorgänge

$$\text{Stoßzahl (dimensionslos)} \quad k = \frac{(\mathbf{v}_{2e} - \mathbf{v}_{1e}) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{v}_{1a} - \mathbf{v}_{2a}) \cdot \mathbf{n}} = \frac{v_{2en} - v_{1en}}{v_{1an} - v_{2an}}$$

Holz auf Holz	$k = 0,5$
Stahl auf Stahl	$k = 0,8$
Elfenbein auf Elfenbein	$k = 0,89$
Glas auf Glas	$k = 0,95$

Geschwindigkeiten nach dem glatten, zentralen Stoß

$$v_{1en} = \frac{v_{1an}(m_1 - k m_2) + v_{2an} m_2 (1 + k)}{m_1 + m_2} \quad v_{2en} = \frac{v_{2an}(m_2 - k m_1) + v_{1an} m_1 (1 + k)}{m_2 + m_1}$$

Schwingungslehre

periodischer Vorgang $u(t)$ mit Periode T

$$u(t) = u(t + T)$$

mit T Periode

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{Frequenz}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Kreisfrequenz}$$

$$A = \frac{1}{2}(u_{\max} - u_{\min}) \quad \text{Amplitude}$$

Beispiel: harmonische Schwingung

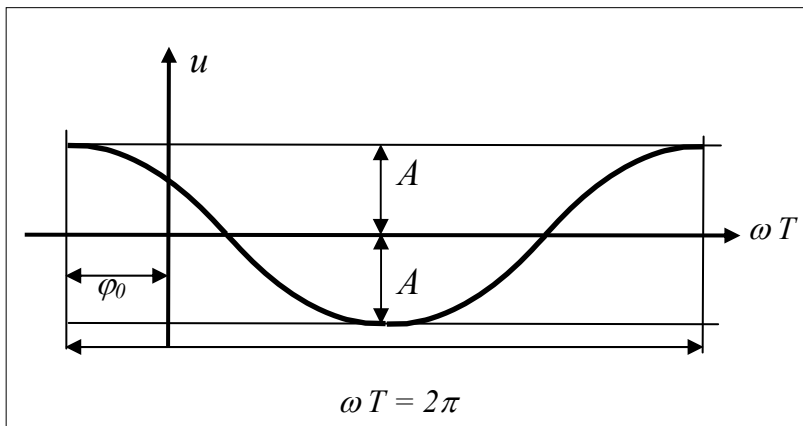
$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \varphi_0 \quad \text{Nullphasenwinkel}$$

linearer ungedämpfter Einmassenschwinger

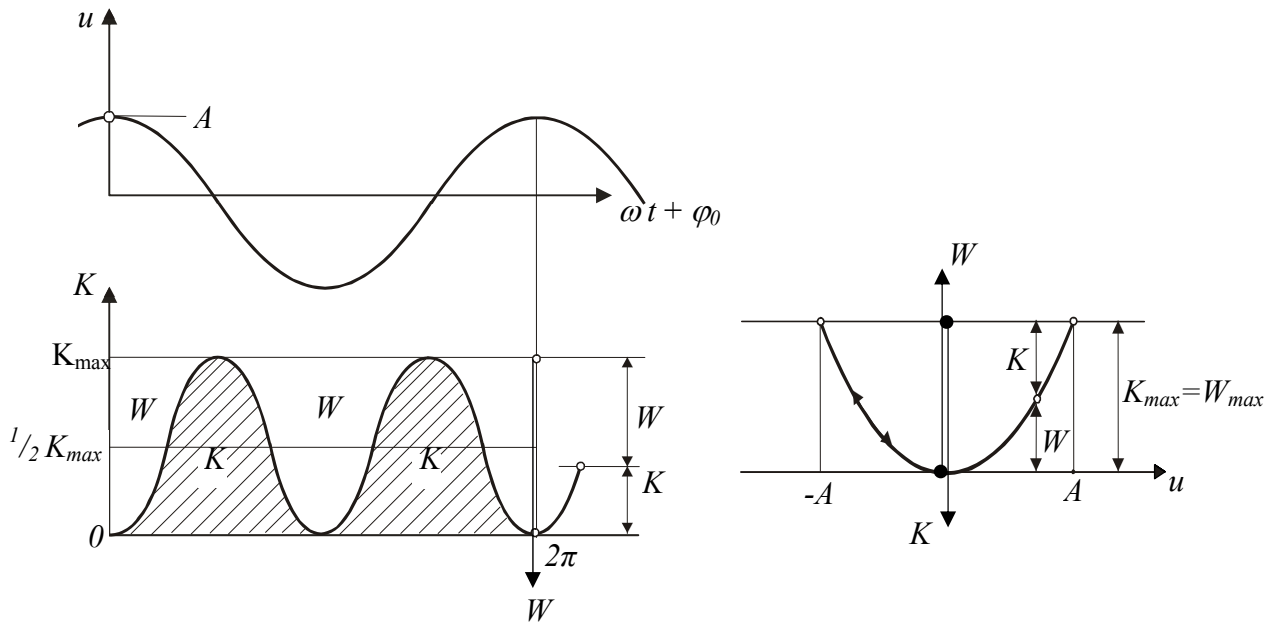
$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

vollständige Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + (C_1 - C_2) i \sin(\omega t) \\ &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \\ &= A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) \end{aligned}$$



Gesamtenergie $K + W = \frac{1}{2} A^2 [m \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + c \cos^2(\omega t + \varphi_0)]$
 $= \frac{1}{2} A^2 c [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} A^2 c$



linearer gedämpfter Einmassenschwinger

Differentialgleichung $m u'' + r u' + c u = 0$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

$D = \frac{r}{2 m \omega_0}$ LEHRsches Dämpfungsmaß

allgemeine Lösung

$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

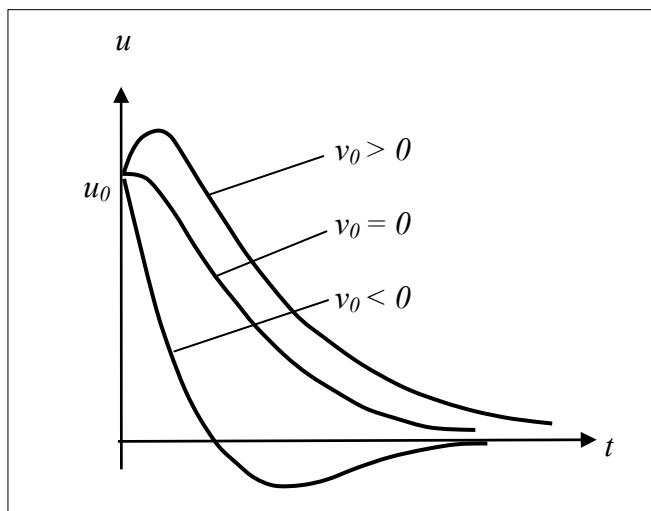
Fallunterscheidung

a) starke Dämpfung: $D > 1$

Es handelt sich um keine Schwingung, sondern um eine Kriechbewegung, die gegen die statische Ruhelage konvergiert.

b) "aperiodischer Grenzfall": $D = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\omega_0$

allgemeine Lösung $u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} = e^{-\omega_0 t} (C_1 + C_2 t)$



c) schwache Dämpfung: $D < 1 \Rightarrow \sqrt{D^2 - 1}$ imaginär

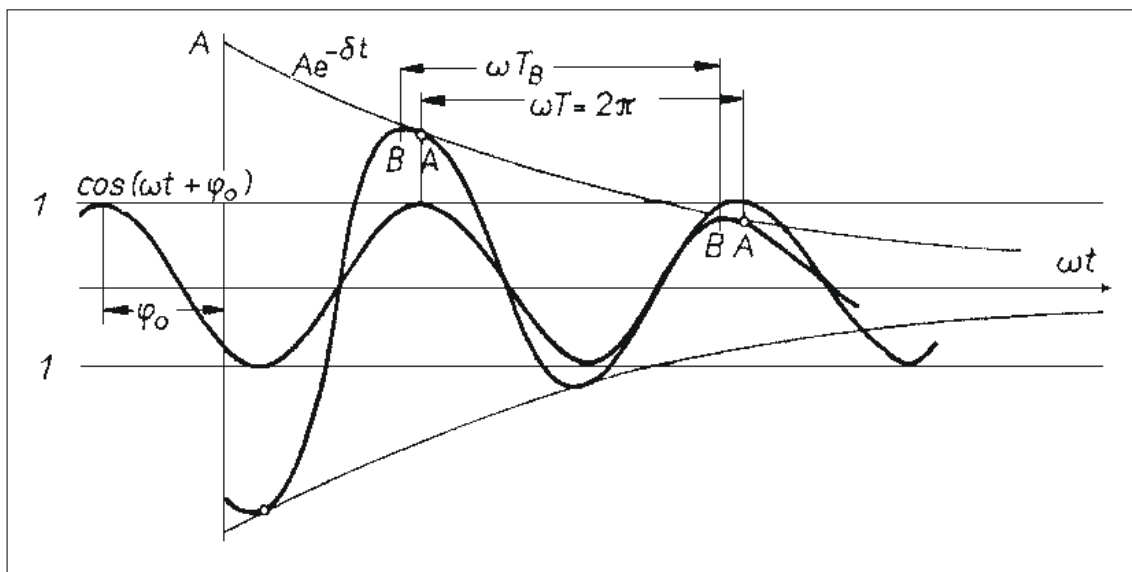
Eigenfrequenz des gedämpften Systems $\omega := \omega_0 \sqrt{1 - D^2} < \omega_0$

Abklingkoeffizient $\delta := \omega_0 D = \frac{r}{2m} > 0$

allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\delta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-\delta t} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)] \\ &= e^{-\delta t} A \cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Verhältnis zweier aufeinander folgender Maxima ist konstant: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}$

logarithmisches Dekrement $\mathcal{D} := \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \delta T$

Erzwungenen Schwingung mit Kräfteerregung

Erregerkraft $F(t)$

Schwingungs-Differentialgleichung $m u'' + r u' + c u = F(t)$

allgemeine Lösung $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$

homogene Lösung wie bei freier Schwingung

harmonischen Erregerkraft $F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$

mit

 \hat{F} der Erregerkraft-Amplitude Ω der Erregerkreisfrequenz

Schwingungs-Differentialgleichung

$$u'' + 2D\omega_0 u' + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \hat{u}_F \cos(\Omega t)$$

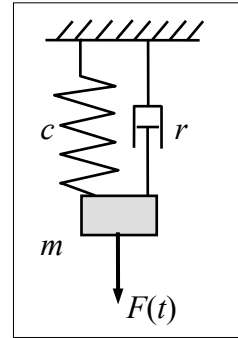
mit

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{Eigenfrequenz des ungedämpften Systems}$$

$$D := \frac{r}{2m\omega_0} \quad \text{LEHRsches Dämpfungsmaß}$$

$$\hat{u}_F := \frac{\hat{F}}{c}$$

$$\eta := \frac{\Omega}{\omega_0} \quad \text{Abstimmung}$$



Fallunterscheidung

a) **ungedämpfter Fall** $D \equiv 0 \equiv r$ partikuläre Lösung $u_p(t) = \hat{u} \cos(\Omega t)$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \hat{u}_F = \frac{1}{1 - \eta^2} \hat{u}_F$$

Vergrößerungsfunktion $V(\eta) := \frac{1}{1 - \eta^2} = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_F}$ $\eta < 1$: **unterkritische Erregung**

hochabgestimmter Schwinger schwingt gleichphasig mit der Erregung

 $\eta = 1$: **Resonanz** $\omega_0 = \Omega \Rightarrow V = \pm \infty$

Wird diese Stelle von kleineren Abstimmungen zu höheren durchlaufen, wächst die Amplitude (theoretisch) beliebig an. Bei längerer Verweildauer im Resonanzpunkt wird der stationäre Ansatz bedeutungslos. Beim Durchlaufen des Resonanzpunktes springt die Phase von gleich auf gegenphasig.

 $\eta > 1$: **überkritische Erregung**

tiefabgestimmter Schwinger schwingt gegenphasig zur Erregung.

b) **gedämpfter Fall**partikuläre Lösung $u_p(t) = \hat{u} \cos(\Omega t + \varphi_A)$ mit $\tan \varphi_A = \frac{\sin \varphi_A}{\cos \varphi_A} = -\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$

$$\hat{u} = \frac{\hat{u}_F}{(1 - \eta^2) - 2D\eta \tan \varphi_A} \frac{1}{\cos \varphi_A} = V(\eta) \hat{u}_F$$

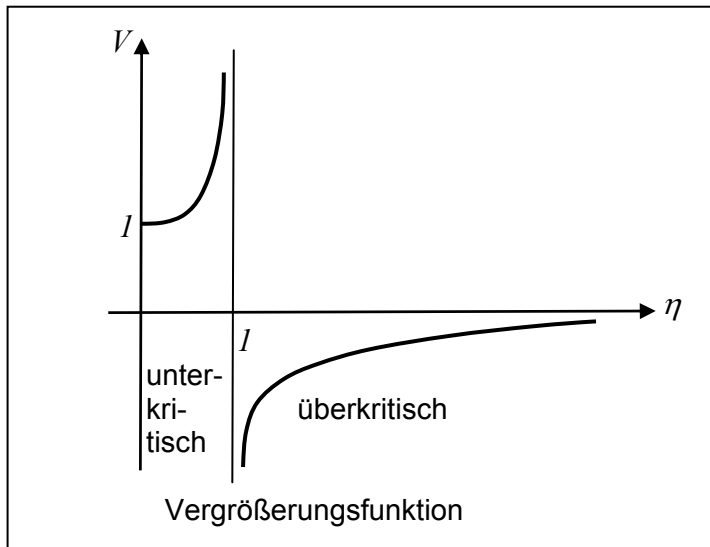
Vergrößerungsfunktion $V(\eta) = 1 / \sqrt{[(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2]}$

Sonderfälle:

1. Fall $\Omega = \omega_0 \Leftrightarrow \eta = 1$ ungedämpfter Resonanzfall

Erregerfrequenz = Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

Vergrößerungsfunktion $V = \frac{1}{2D} = \frac{m\omega_0}{r} = \frac{\sqrt{mc}}{r}$



2. Fall maximale Vergrößerung

Ihr Maximum erreicht die Vergrößerungsfunktion an der Stelle $\eta_r = \sqrt{1 - 2D^2}$

Die Vergrößerungsfunktion hat hier den maximalen Wert

$$V(\eta_r) = 1 / \sqrt{[4D^4 + 4D^2(1 - 2D^2)]} = 1 / (2D \sqrt{1 - D^2})$$

3. Fall $\Omega = \omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$

Erregerfrequenz gleich Eigenfrequenz des gedämpften Systems

$$\eta_d = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - D^2}$$

Liste der wichtigsten Bezeichnungen

<i>Symbol</i>	<i>Bezeichnung</i>	<i>Dimension</i>	<i>Einheit</i>
A	Flächeninhalt	$Länge^2$	m^2
\mathcal{A}	Flächengebiet		
\mathbf{a}	Beschleunigung	$\frac{Länge}{Zeit^2}$	$\frac{m}{s^2}$
A_a	Arbeit der äußeren Lasten	$Kraft \times Länge$	$J = Nm = Ws = \frac{m^2 kg}{s^2}$
	Joule		
A_i	Arbeit der Spannungen	$Kraft \times Länge$	$J = Nm = \frac{m^2 kg}{s^2}$
\mathbf{d}	Drall	$\frac{Länge^2 \times Masse}{Zeit}$	$\frac{m^2 kg}{s}$
D	Drillung	$Länge^{-1}$	m^{-1}
E	Elastizitätsmodul	$\frac{Kraft}{Fläche}$	$Pa = \frac{N}{m^2}$ Pascal
e	Spur der Dehnungsmatrix	-	-
\mathbf{e}_i	kartesischer Basisvektor		
f	Frequenz	$Zeit^{-1}$	s^{-1}
\mathbf{f}^A	Flächenkraftdichte	$\frac{Kraft}{Fläche}$	$Pa = \frac{N}{m^2}$
\mathbf{f}^M	Massenkraftdichte	$\frac{Kraft}{Masse}$	$\frac{N}{kg}$
\mathbf{F}	(Einzel-) Kraftvektor	$\frac{Masse \times Länge}{Zeit^2}$	$N = \frac{kg m}{s^2}$ Newton
g	irdische Gravitationskonstante	$\frac{Länge}{Zeit^2}$	$\frac{m}{s^2}$
$\mathbf{F}_G = \mathbf{G}$	Gewichtskraft	$\frac{Masse \times Länge}{Zeit^2}$	$N = \frac{kg m}{s^2}$
I_{ij}	Flächenträgheitsmomente	$Länge^4$	m^4
K	kinetische Energie	$\frac{Länge^2 \times Masse}{Zeit^2}$	$\frac{m^2 kg}{s^2}$
l	Länge	Länge	m Meter
L_a	Leistung der äußeren Lasten	$\frac{Masse \times Länge^2}{Zeit^3}$	$W = \frac{kg m^2}{s^3}$ Watt
l_a	spez. Leistung der äußeren Lasten	$\frac{Masse}{Zeit^3 \times Länge}$	$\frac{kg}{s^3 m}$
L_i	Spannungsleistung	$\frac{Masse \times Länge^2}{Zeit^3}$	$W = \frac{kg m^2}{s^3}$

l_i	spez. Spannungsleistung	$\frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}^3 \times \text{Länge}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}^3 \text{m}}$
\mathcal{L}	LAGRANGE-Funktion	$\frac{\text{Länge}^2 \times \text{Masse}}{\text{Zeit}^2}$	$\frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}$
M	Massenmittelpunkt		
M_p	Momentanpol		
\mathbf{M}	Moment	$\text{Kraft} \times \text{Länge}$	$N \text{ m}$
m	Masse	Masse	kg Kilogramm
$n(x)$	Streckenlast in Normalrichtung	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$	$\frac{N}{m}$
\mathbf{n}	Normalenvektor		
N	Normalkraft	$\frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$	$N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$
\mathbf{o}	Nullvektor		
O	raumfester Punkt		
p	Druck	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$	$\text{Pa} = \frac{N}{\text{m}^2}$ Pascal
\mathbf{p}	Impuls	$\frac{\text{Länge} \times \text{Masse}}{\text{Zeit}}$	$\frac{\text{m kg}}{\text{s}}$
$q_y(x), q_z(x)$	Streckenlasten in Querrichtungen	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$	$\frac{N}{m}$
Q	Querkraft	$\frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$	$N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$
\mathbf{r}	Ortsvektor	Länge	m
s	Bogenlänge	Länge	m
s	Spur der Spannungsmatrix	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$	$\text{Pa} = \frac{N}{\text{m}^2}$
S	statisches Moment	Länge^3	m^3
T	Periode	Zeit	s
t	Zeit	Zeit	s Sekunde
t	Schubfluss	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$	$\frac{N}{m}$
U	Potential der äußeren Kräfte	$\text{Kraft} \times \text{Länge}$	$N \text{ m}$
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor	Länge	m
V	Volumeninhalt	Länge^3	m^3
\mathcal{V}	Volumengebiet		
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor	$\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$	$\frac{m}{s}$
W	elastische Formänderungsenergie	$\frac{\text{Länge}^2 \times \text{Masse}}{\text{Zeit}^2}$	$\frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}$
w	spez. Formänderungsenergie	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^2}$	$\frac{N}{\text{m}^2}$
W^*	Formänderungs-Ergänzungsenergie	$\frac{\text{Länge}^2 \times \text{Masse}}{\text{Zeit}^2}$	$\frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}$

w^*	spez. Formänderungs-Ergänzungsenergie	$\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^2}$	$\frac{N}{m^2}$
x, y, z oder x_i	kartesische Koordinaten	Länge	m

Größen am Balken

A	Querschnittsflächeninhalt
x	Balkenachsenkoordinate
y, z	Koordinaten in Querrichtung
u, v, w	Verschiebungskomponenten
$\{N, Q_y, Q_z\} = \{F_N, F_{Q_y}, F_{Q_z}\}$	Schnittkraft
$\{M_x, M_y, M_z\} = \{M_t, M_{by}, M_{bz}\}$	Schnittmoment
$\{n, q_y, q_z\}$	Streckenlasten

<i>griech. Alphabet (klein)</i>	<i>griech. Alphabet (groß)</i>	<i>Bezeichnung</i>
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
ϑ	θ	theta
ι	I	jota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	my
ν	N	ny
ξ	Ξ	xi
\omicron	O	omikon
π	Π	pi
ρ	P	rho
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Y	ypsilon
φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

α	therm. Ausdehnungskoeffizient	$Temperatur^{-1}$	K^{-1}
γ	Schubwinkel	-	-
δ	Variation		
ε	Dehnung	-	-
ϱ	Torsionsdrehwinkel	-	-
θ	Temperatur	$Temperatur$	K Kelvin
Θ_{ij}	Massenträgheitsmomente	$Masse \times Länge^2$	$kg\ m^2$
κ	Krümmung	$Länge^{-1}$	m^{-1}
μ	Reibungskoeffizient	-	-
ν	Querkontraktionszahl	-	-
π	3,14...	-	-
ρ	Dichte	$\frac{Masse}{Länge^3}$	$\frac{kg}{m^3}$
σ	Spannung	$\frac{Kraft}{Fläche}$	$Pa = \frac{N}{m^2}$
Σ	Summenzeichen		
τ	Schubspannung	$\frac{Kraft}{Fläche}$	$Pa = \frac{N}{m^2}$
φ^i	Koordinate		
ω	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz	$Zeit^{-1}$	s^{-1}
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor	$Zeit^{-1}$	s^{-1}
Ω	Erreger-Kreisfrequenz	$Zeit^{-1}$	s^{-1}

Abkürzungen

BZS	Bezugssystem
Dgl.	Differenzialgleichung
EV	Eigenvektor
EW	Eigenwert
HSA	Hauptspannungsachsen
HTA	Hauptträgheitsachsen
KOO(S)	Koordinaten(system)
ONB	Orthonormalbasis

=	Gleichheit
:=	Definition
≡	Identifikation
≈	ungefähr gleich
≅	Entsprechung
÷	bis